BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

NGUYỄN THỊ MAI VÂN

MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA ĐA TẠP ĐẠI SỐ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

BÌNH ĐỊNH - 2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

NGUYỄN THỊ MAI VÂN

MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA ĐA TẠP ĐẠI SỐ

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã ngành: 9 46 01 04

Phản biện 1: PGS. TS. Đoàn Trung Cường

Phản biện 2: TS. Trần Quang Hóa

Phản biện 3: PGS. TS. Nguyễn Thị Hồng Loan

Người hướng dẫn khoa học 1: PGS. TS. ĐẶNG TUẤN HIỆP
Người hướng dẫn khoa học 2: PGS. TS. LÊ CÔNG TRÌNH

Bình Định - 2024

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Đặng Tuấn Hiệp và PGS. TS. Lê Công Trình. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả trước khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào trước đó.

Tác giả

Nguyễn Thị Mai Vân

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên, tôi xin được bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới thầy tôi, PGS. TS. Đặng Tuấn Hiệp. Thầy đã định hướng nghiên cứu, kiên trì và tận tình truyền đạt, giảng giải kiến thức chuyên môn, giúp tôi vượt qua những lúc khó khăn, để có thể chủ động và tự tin trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn trân trọng đến thầy PGS. TS. Lê Công Trình. Thầy luôn chỉ bảo tận tình, khích lệ động viên và quan tâm ưu ái đến tôi rất nhiều trong những năm qua.

Tôi xin chân thành cảm ơn sự góp ý và giúp đỡ tận tình của TS. Lê Thanh Hiếu, TS. Ngô Lâm Xuân Châu, TS. Phạm Thùy Hương và TS. Nguyễn Bin đã dành cho tôi trong quá trình viết và chỉnh sửa Luận án.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu Trường Đại học Quy Nhơn, Phòng Đào tạo sau đại học, Khoa Toán và Thống kê đã tận tình giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành chương trình học tập.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu Trường Sĩ quan Không Quân, lãnh đạo Khoa Cơ bản cùng toàn thể giảng viên trong khoa đã trao cho tôi cơ hội được tiếp tục đi học và tạo nhiều điều kiện thuận lợi để tôi tập trung học tập.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu Trường Sĩ quan Kỹ thuật Quân sự cùng các đồng chí ở Đại đội 2, Tiểu đoàn 1 đã luôn tận tình giúp đỡ tạo mọi điều kiện thận lợi trong thời gian tôi học tập và nghiên cứu ở Trường Đại học Quy Nhơn.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến PGS. TS. Nguyễn Chánh Tú, TS. Nguyễn Thị Ngọc Giao (Trường Đại học Bách khoa, Đại học Đà Nẵng) và Th.S Nguyễn Hồng Công (Trường Quốc tế Châu á Thái Bình Dương Gia Lai) về sự giúp đỡ chân thành.

Xin được gửi lời cảm ơn tới GS. TS. Phạm Tiến Sơn, PGS. TS. Tạ Lê Lợi, TS. Trịnh Đức Tài (Trường Đại học Đà Lạt) đã chân thành góp ý cho tôi trong thời gian sinh hoạt chuyên môn ở Trường Đại học Đà Lạt và viết Luận án.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán luôn hỗ trợ và tạo điều kiện thuận lợi để tôi được tham gia các hội nghị, hội thảo và các trường học liên quan đến chuyên môn trong nhiều năm qua.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo cũ đã và đang công tác tại Trường Đại học Quy Nhơn cùng các bạn nhóm nghiên cứu sinh của Trường về những giúp đỡ, chia sẻ trong cuộc sống và khoa học.

Một lời cảm ơn đặc biệt xin được dành cho gia đình thân yêu đã động viên, tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt thời gian học tập nghiên cứu vừa qua. Cảm ơn sự hy sinh của chồng và hai con - chỗ dựa tinh thần vững chắc giúp tôi vượt qua mọi khó khăn để hoàn thành Luận án.

Tác giả

Nguyễn Thị Mai Vân

Bảng kí hiệu

$\mathbb{C}$	:	Trường số phức
$\mathbb{R}$	:	Trường số thực
$\mathbb{Q}$	:	Trường số hữu tỉ
$\mathbb{N}$	:	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{P}^n$	:	Không gian xạ ảnh n chiều trên trường số phức
$\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$	:	Vành đa thức theo $n+1$ biến trên trường số phức
$\dim(X)$	:	Chiều của đa tạp xạ ảnh X
$S[X]$	:	Vành tọa độ thuần nhất của đa tạp xạ ảnh X
$\deg X$	:	Bậc của đa tạp xạ ảnh X
$G(k,n)$	:	Đa tap Grassmann
$\bigwedge^k V$	:	Lũy thừa ngoài thứ k của không gian vectơ V
$Z_*(X)$	:	Nhóm các chu trình trên X
$[\mathrm{div}(\alpha)]$	:	Lớp k - chu trình của α
$\mathrm{Rat}_k(X)$	:	Nhóm con của nhóm các chu trình trên X
$A(X)$	:	Vành Chow của đa tạp xạ ảnh X
$\int_X \alpha$	:	Bậc của chu trình α trên vành Chow của đa tạp xạ ảnh X
$\chi(X,E)$	:	Đặc trưng Euler của phân thớ vectơ E trên đa tạp xạ ảnh X
$c_k(E)$	:	Lớp Chern thứ k của phân thớ vectơ E
$s_k(E)$	:	Lớp Serge thứ k của phân thớ vectơ E
$\mathrm{ch}(E)$	:	Đặc trưng Chern của phân thớ vec tơ E
$\mathrm{td}(E)$	:	Lớp Todd của phân thớ vec tơ E
$S_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$	:	Đa thức Schur
$e_k(x_1, \ldots, x_n)$	:	Đa thức đối xứng sơ cấp thứ k
$h_k(x_1, \ldots, x_n)$	:	Đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ thứ k
$F_k(X)$	:	Đa tạp Fano của đa tạp X
$\mathrm{Sym}^n X$	:	Lũy thừa đối xứng thứ n của X
$\mathcal{S}$	:	Phân thớ con phổ dụng của đa tap Grassmann G(k,n)
$\mathcal{Q}$	:	Phân thớ thương phổ dụng của đa tap Grassmann G(k,n)
$\mathcal{S}^*$	:	Phân thớ đối ngẫu của phân thớ $\mathcal{S}$
$\mathbb{S}^n$	:	Tập các ma trận đối xứng nửa xác định dương trên $\mathbb{R}$
$\mathbb{QS}^n$	:	Tập các ma trận đối xứng nửa xác định dương trên $\mathbb{Q}$

$\binom{n}{k}$	:	Tổ hợp chập k của n phần tử
$\det(A)$	:	Định thức của ma trận A
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$	:	Phân thớ đường thẳng trên $\mathbb{P}^n$
$\#I$	:	Lực lượng của tập I
$\|\lambda\|$	:	Trọng lượng của phân hoạch λ
$A \otimes B$	:	Tích tenxơ của A và B
$[n]$	:	Tập $\{1, \ldots, n\}$
$[[n]]$	:	Tập $\{0, 1, \ldots, n\}$.
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	:	Số Stirling loại một
T_n	:	Phân thớ Tango
$X \succeq 0$	:	X là ma trận nửa xác định dương
$X \succ 0$	:	X là ma trận xác định dương

Mở đầu

Các đa tạp đại số là đối tượng nghiên cứu chính trong Hình học đại số. Bên cạnh các phương pháp của Hình học đại số và Giải tích cổ điển như dựa vào phương trình xác định, các phương pháp của Hình học đại số hiện đại mang đến nhiều cách tiếp cận hiệu quả hơn. Một trong các cách tiếp cận hiện đại đó là dựa vào lý thuyết giao. Lý thuyết giao của đa tạp đại số được các nhà Toán học xây dựng một cách hệ thống và trình bày nhiều ứng dụng vào việc nghiên cứu các bất biến của các đa tạp đại số. Ví dụ điển hình nhất trong phương pháp tiếp cận này là nghiên cứu các số giao trên đa tạp Grassmann. Cách tiếp cận này đã được nhiều nhà Toán học quan tâm và gần đây đã đem đến nhiều kết quả thú vị.

Các nghiên cứu liên quan đến đa tạp Grassmann được bắt đầu từ thế kỷ 19 với tên tuổi của nhiều nhà Toán học như Schubert, Grassmann. Cùng với sự phát triển của Hình học đại số hiện đại, việc tính toán số giao trên đa tạp Grassmann được xem xét lại theo hướng sử dụng kỹ thuật địa phương hóa trong lý thuyết giao đẳng biến. Kỹ thuật địa phương hóa là một công cụ mạnh được sử dụng trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu khác nhau như Hình học đại số, Tôpô đại số, Hình học symplectic, Tổ hợp đại số và Lý thuyết kỳ dị. Kỹ thuật địa phương hóa đã được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học nổi tiếng như Borel [9], Atiyah-Bott [6] và Berline-Vergne [7]... Gần đây, bằng cách sử dụng một biến thể của đa thức nội suy cho các đa thức đối xứng bậc bị chặn, Hiep [33] đã chỉ ra các đồng nhất thức liên quan đến các đa thức đối xứng. Từ đó, một cách khác để xử lý các số giao trên đa tạp Grassmann được đưa ra. Kết quả này cung cấp công cụ cho việc lập trình tính toán hình thức, cơ sở để thiết lập những công thức mới liên quan đến những bất biến của đa tạp đại số. Trong phạm vi của luận án, chúng tôi sử dụng các kết quả này để nghiên cứu một số nội dung liên quan đến các bất biến của một đa tạp xạ ảnh cụ thể gồm bậc và giống của đa tạp Fano, đặc trưng Euler của phân thớ Tango và bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Chúng tôi đánh giá các nghiên cứu trên có ý nghĩa khoa học và thực tiễn. Công việc này hứa hẹn sẽ mang lại một số kết quả tốt và sẽ thu hút sự quan tâm của nhiều nhà Toán học trên thế giới.

Các nghiên cứu liên quan đến đa tạp Fano được bắt đầu từ cách đây hơn 40 năm với các kết quả của Altman-Kleiman [4], Barth-Van de Ven [7], Debarre-Manivel [16], Langer [38], Markushevich [40], Tennison [51], cũng như những kết quả mới gần đây của Hiep [31]. Kế thừa các kết quả trên, mục tiêu nghiên cứu đầu tiên của chúng tôi trong luận án này, đó là nghiên cứu về bậc và giống của đa tạp Fano, bởi những thông tin về các bất biến này cung cấp các ứng dụng quan trọng trong việc phân loại các lớp đa tạp này.

Bậc của đa tạp đại số phụ thuộc vào phép nhúng của nó vào một không gian xạ ảnh. Bậc của đa tạp xạ ảnh phức X là số giao điểm của X với một đa tạp tuyến tính tổng quát có đối chiều bằng số chiều của X. Nếu đa tạp xạ ảnh được cho bởi phương trình đa thức thì bậc của nó có thể được tính bằng kỹ thuật cơ sở Gröbner. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp việc xác định phương trình định nghĩa một đa tạp xạ ảnh là cực kỳ khó khăn. Khi đó, bậc có thể được tính bằng các công cụ của lý thuyết giao được phát triển bởi William Fulton từ những năm đầu thập niên 1980. Một ví dụ điển hình cho trường hợp này là đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên các siêu mặt xạ ảnh hoặc giao đầy đủ xạ ảnh. Các đa tạp Fano này là đa tạp con của đa tạp Grassmann. Thông qua phép nhúng Plücker thì chúng có cấu trúc của một đa tạp xạ ảnh. Bằng ngôn ngữ của lý thuyết giao, bậc của đa tạp Fano có thể biểu diễn như là một số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann [22, Ví dụ 14.7.13]. Trên cơ sở đó, các công thức tường minh về bậc của đa tạp Fano cũng được chỉ ra bởi Debarre - Manivel [16, Định lý 2.1] và Hiep [33, Định lý 1.1]. Tiếp tục hướng nghiên cứu này, bằng cách sử dụng phương pháp xử lý số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann được khám phá bởi Hiep [33], chúng tôi đã thiết lập một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ tổng quát thông qua hệ số của một đơn thức đặc biệt trong khai triển của một đa thức đối xứng, xem Định lý 2.5.3. Đặc biệt, trong trường hợp chiều của đa tạp Fano bằng 1, chúng tôi đã chỉ ra công thức liên hệ giữa giống và bậc, xem Định lý 2.6.1.

Quan tâm tiếp theo của chúng tôi trong luận án này là áp dụng các kỹ thuật tính toán của lý thuyết giao trên không gian xạ ảnh để thiết lập một công thức cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango.

Không gian xạ ảnh là trường hợp đặc biệt của đa tạp Grassmann. Phân thớ vectơ trên không gian xạ ảnh thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà Toán học trên thế giới. Một phân thớ vectơ được gọi là không phân tách được nếu nó không thể phân tích thành tổng trực tiếp của các phân thớ vectơ có hạng nhỏ hơn. Xây dựng các phân thớ vectơ không phân tách được trên không gian xạ ảnh là một vấn đề khó trong Hình học đại số. Hartshorne [26] đã khẳng định rằng chúng ta không thể xây dựng được các phân thớ vectơ không phân tách được trong trường hợp số chiều lớn và số hạng nhỏ. Cụ thể hơn, Hartshorne đã chỉ ra rằng mọi phân thớ vectơ hạng 2 trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với $n \geq 7$ đều tách được thành tổng trực tiếp của các phân thớ đường thẳng. Năm 1976, Tango [51] đã chỉ ra một ví dụ thú vị về một phân thớ vectơ không phân tách được hạng $n-1$ trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ và được gọi là phân thớ Tango. Theo Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch [22], đặc trưng Euler của phân thớ Tango có thể được xác định thông qua đặc trưng Chern và lớp Todd của phân thớ vectơ. Đặc biệt, trên không gian xạ ảnh, đặc trưng Chern và lớp Todd của phân thớ vectơ khá đơn giản. Với cách tiếp cận này, chúng tôi tính được đặc trưng Chern của phân thớ vectơ Tango trên không gian xạ ảnh (xem Mệnh đề 3.3.2) và lớp Todd của phân thớ tiếp xúc trên không gian xạ ảnh (xem Mệnh đề 3.4.1). Từ đó, chúng tôi chỉ ra được kết quả cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh n - chiều (xem Định lý 3.5.2).

Quy hoạch nửa xác định là một bài toán quan trọng của Quy hoạch toán học bắt đầu từ năm 1990. Bài toán này có ứng dụng rất đa dạng trong Tối ưu lồi, Lý thuyết điều khiển và Tối ưu hóa tổ hợp. Quan tâm cuối cùng của chúng tôi trong luận án là xác định một đặc trưng cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định.

Quy hoạch nửa xác định là bài toán có dạng:

$$\min_{X \in \mathbb{S}^n} C \bullet X \text{ với ràng buộc } A_i \bullet X = b_i, \forall i = 1, \ldots, m \text{ và } X \succeq 0,$$

trong đó $C, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{QS}^n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}$ và

$$C \bullet X := \operatorname{Trace}(C \cdot X) = \sum c_{ij} x_{ij}.$$

Chúng ta biết rằng các tọa độ của ma trận tối ưu là các nghiệm của các đa thức một biến. Nếu các dữ liệu là tổng quát thì bậc của các đa thức này chỉ phụ thuộc vào hạng r của ma trận tối ưu và bậc này được gọi là bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định, ký hiệu là $\delta(m, n, r)$. Chú ý rằng bậc đại số $\delta(m, n, r)$ trong quy hoạch nửa xác định chỉ được định nghĩa tốt nếu bộ ba (m, n, r) thỏa mãn bất đẳng thức Pataki [44, Mệnh đề 5], tức là

$$\binom{n-r+1}{2} \leq m \leq \binom{n+1}{2} - \binom{r+1}{2}.$$

Trong [44], Nie, Ranestad và Sturmfels đã giới thiệu và chỉ ra rằng bậc đại số $\delta(m, n, r)$ trong quy hoạch nửa xác định bằng với bậc của một đa tạp đối ngẫu [44, Định lý 13] bằng phương pháp hình học đại số phức. Đặc biệt, một trong các kết quả chính của họ là chỉ ra nhiều công thức cho bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định với các giá trị m,n,r đặc biệt [44, Định lý 11] bằng cách tính các số Euler của đa tạp trơn, bậc của đa tạp định thức... Sau đó, bằng ngôn ngữ của lý thuyết giao, von Bothmer và Ranestad đã chỉ ra bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định có thể được tính toán như một số giao của lớp Segre của lũy thừa đối xứng thứ hai của phân thớ phổ dụng trên đa tạp Grassmann $G(k,n)$ [11, Mệnh đề 4.1]. Đồng thời, họ cũng đưa ra một công thức tường minh để tính bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định dưới dạng tổng của các hàm giá trị nguyên theo các dãy con của tập $\{1,\ldots,n\}$ [11, Định lý 1.1]. Gần đây, sử dụng kỹ thuật địa phương hóa trong lý thuyết giao đẳng biến, Hiep [30, Định lý 1] cũng đã đề xuất một công thức tính bậc đại số dưới dạng tổng của các hàm phân thức đối xứng. Dựa vào các kết quả liên quan đến đồng nhất thức trên đa thức đối xứng kép được đưa ra bởi Hiep [33], chúng tôi chỉ ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định dưới dạng hệ số của một đơn thức đặc biệt trong khai triển của một đa thức đối xứng kép (xem Định lý 4.6.1). Kết quả của định lý này cung cấp một phương pháp tổ hợp để tính bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Như một cách áp dụng, chúng tôi sử dụng đặc trưng này chứng minh lại các kết quả của Nie - Ranestad - Sturmfels theo một cách đơn giản hơn. Hơn nữa, chúng tôi còn chỉ ra nhiều kết quả liên quan đến các đa thức Schur, đa thức đối xứng sơ cấp và đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ (xem Mệnh đề 4.7.1 và Mệnh đề 4.7.2). Những kết quả này đóng góp thêm nhiều điều thú vị liên quan đến các lớp đa thức đối xứng cơ bản này. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng cung cấp thêm một cách chứng minh độc lập cho Định lý 4.5.1 trong [33] từ cảm hứng của Don Zagier trong [25, Mệnh đề A.1].

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, nội dung chính của Luận án được trình bày trong bốn chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, chúng tôi trình bày các định nghĩa và kết quả cơ bản, mang tính chất chuẩn bị cho các lập luận ở các phần sau của Luận án, gồm các kiến thức cơ sở của Hình học đại số, cơ sở của lý thuyết giao, phép tính Schubert, đa thức đối xứng và lý thuyết giao đẳng biến.

Chương 2: Bậc của đa tạp Fano. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết kết quả của hai bài báo [36] và [34]. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ trong không gian xạ ảnh phức dưới dạng hệ số đặc biệt của một đa thức đối xứng. Đồng thời, chúng tôi thiết lập một công thức liên hệ giữa bậc và giống của đa tạp Fano trong trường hợp chiều của đa tạp Fano bằng 1.

Chương 3: Đặc trưng Euler của phân thớ Tango. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết các kết quả chính trong bài báo [14]. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra một công thức cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango.

Chương 4: Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết các kết quả chính trong bài báo [37]. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Sau đó, sử dụng đặc trưng này kết hợp với các kết quả của các lớp đa thức đối xứng được tìm thấy, chúng tôi chứng minh lại các kết quả của Nie, Ranestad và Sturmfels [44] bằng phương pháp đơn giản hơn.

Mặc dù bản thân đã nỗ lực và rất cố gắng để thực hiện luận án tốt nhất, nhưng do điều kiện thời gian có hạn, trình độ kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên luận án khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những góp ý của quý Thầy cô giáo và bạn đọc để luận án được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày các định nghĩa và kết quả cơ bản, mang tính chất chuẩn bị cho các lập luận ở các phần sau của luận án, gồm các kiến thức cơ sở của Hình học đại số, cơ sở của lý thuyết giao, phép tính Schubert, đa thức đối xứng và lý thuyết giao đẳng biến.

1.1 Cơ sở của Hình học đại số

1.1.1 Đa tạp xạ ảnh

Định nghĩa 1.1.1 ([48, Chương 3]). *Không gian xạ ảnh n chiều* trên $\mathbb{C}$, ký hiệu là $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hoặc đơn giản là $\mathbb{P}^n$, là tập tất cả các không gian con một chiều của không gian vec tơ $\mathbb{C}^{n+1}$.

Không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ còn được hiểu như là tập thương

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

trong đó $\sim$ là quan hệ tương đương được định nghĩa như sau:

$$x \sim y \text{ nếu và chỉ nếu } y = \lambda x \text{ với } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Mỗi phần tử trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ được gọi là một điểm trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. Một điểm p trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ được xem như là một lớp tương đương

$$[(x_0, \dots, x_n)] = \{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) | \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ và có ít nhất một } x_i \neq 0\}.$$

Các thành phần $x_0, \ldots, x_n$ được gọi là các tọa độ thuần nhất hay tọa độ xạ ảnh của điểm p và người ta thường ký hiệu tọa độ của điểm p trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ là

$$p = [x_0 : \ldots : x_n].$$

Với mỗi $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, định nghĩa

$$U_i := \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}.$$

Khi đó, định nghĩa các tập U_i này là hợp lý. Thật vậy, giả sử $[y_0 : \ldots : y_n]$ là một đại diện khác trong lớp tương đương $[x_0 : \ldots : x_n]$. Khi đó tồn tại $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sao cho $y_j = \lambda x_j$ với mọi $0 \leq j \leq n$. Vì $x_i \neq 0$ nên $y_i = \lambda x_i \neq 0$. Các tập U_i này gọi là các phủ mở của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho V là một không gian vectơ $n+1$ chiều trên trường số phức $\mathbb{C}$. *Không gian xạ ảnh n chiều trên V*, ký hiệu là $\mathbb{P}^n(V)$ hoặc đơn giản là $\mathbb{P}(V)$, là tập hợp các không gian con một chiều của không gian vectơ V, tức là

$$\mathbb{P}(V) = \{W \subset V | \dim W = 1\}.$$

Định nghĩa 1.1.3 ([48, Chương 3])**.** Cho d là một số nguyên dương. Đa thức $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ được gọi là *đa thức thuần nhất* bậc d nếu mọi đơn thức của f đều có bậc bằng d.

Định nghĩa 1.1.4 ([48, Chương 3])**.** Cho $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ là các đa thức thuần nhất. Tập hợp

$$Z(f_1, \ldots, f_k) := \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0, \forall i = \overline{1, k}\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

gọi là *tập đại số xạ ảnh* xác định bởi $f_1, \ldots, f_k$.

Định nghĩa 1.1.5 ([48, Chương 3])**.** Một tập đại số xạ ảnh $X \subseteq \mathbb{P}^n$ được gọi là *khả quy* nếu X có thể được biểu diễn thành một hợp của hai tập đại số xạ ảnh

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_1, X_2 \subsetneq X.$$

Ngược lại, ta nói X là *bất khả quy* nếu X không có biểu diễn như vậy. Một *đa tạp xạ ảnh* là một tập đại số xạ ảnh bất khả quy.

Ví dụ 1.1.1. Cho đa thức thuần nhất bậc một

$$f(x_0, \ldots, x_n) = c_0 x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

Khi đó, đa tạp xạ ảnh $Z(f)$ gọi là siêu phẳng. Khi $n = 2$ ta gọi $Z(f)$ là *đường thẳng*. Khi $n = 3$ ta gọi $Z(f)$ là *mặt phẳng*. Các đa tạp xạ ảnh được xác định bởi các đa thức thuần nhất bậc một gọi là *đa tạp tuyến tính*.

Ví dụ 1.1.2. Cho $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ là một đa thức thuần nhất bậc d. Khi đó

$$Z(f) = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$$

gọi là một *siêu mặt bậc d xác định bởi f*.

Định nghĩa 1.1.6 ([48, Chương 3])**.** Cho $X \neq \emptyset$ là một đa tạp xạ ảnh trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. *Iđêan thuần nhất của đa tạp xạ ảnh X*, ký hiệu là $\mathcal{I}(X)$, là tập hợp được định nghĩa

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \mid f \text{ là thuần nhất và } f(p) = 0, \forall p \in X\}.$$

Quy ước $\mathcal{I}(\emptyset) = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$.

Chúng ta dễ dàng kiểm tra được $\mathcal{I}(X)$ là một iđêan trong vành đa thức $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$. Khi đó, vành thương

$$S(X) := \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(X)$$

là một vành phân bậc và được gọi là *vành tọa độ thuần nhất* của đa tạp xạ ảnh X.

Thành phần thuần nhất bậc d của $S(X)$, ký hiệu là $S(X)_d$, là tập hợp được định nghĩa bởi

$$S(X)_d := \{f \mid f \text{ là đa thức thuần nhất bậc d và } f \in S(X)\}.$$

Định nghĩa 1.1.7 ([48, Chương 3])**.** Cho X là một đa tạp xạ ảnh và I là một iđêan thuần nhất của vành tọa độ thuần nhất $S(X)$. Khi đó ta định nghĩa tập hợp

$$Z_X(I) := \{p \in X \mid f(p) = 0 \text{ với mọi } f \in I\}.$$

Mỗi tập con của X có dạng $Z_X(I)$ với I là một iđêan thuần nhất của vành tọa độ thuần nhất $S(X)$ được gọi là một *đa tạp xạ ảnh con* của X.

Định nghĩa 1.1.8 ([48, Chương 3])**.** Cho $X \neq \emptyset$ là một đa tạp xạ ảnh trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. *Trường các hàm hữu tỉ của X*, ký hiệu là $K(X)$, là tập hợp được định nghĩa bởi

$$K(X) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in S(X)_d \text{ và } g \neq 0 \right\}.$$

Với mọi $p \in X$, *vành địa phương của* X *tại* p, ký hiệu là $\mathcal{O}_{X,p}$, được định nghĩa bởi

$$\mathcal{O}_{X,p} := \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) \mid g(p) \neq 0 \right\}$$

Nếu $U \subset X$ là một đa tạp con của X và $p \in X$ thì

$$\mathcal{O}_{X,U} := \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_{X,p}.$$

Định nghĩa 1.1.9 ([5, Mục 4])**.** Cho $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ và $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Ta định nghĩa *đạo hàm* của F tại điểm p, ký hiệu là d_pF, là phần tuyến tính trong khai triển Taylor của F tại p.

Cụ thể, giả sử F được viết dưới dạng

$$F(x) = F(p) + L(x_1 - p_1, x_2 - p_2, \dots, x_n - p_n) + G(x_1 - p_1, x_2 - p_2, \dots, x_n - p_n),$$

trong đó L là phần tuyến tính và G là đa thức không chứa nhân tử tuyến tính hay hằng. Khi đó, đạo hàm của F tại p là $L(x-p)$ được xác định bởi

$$L(x-p) = d_pF(x-p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(x_j - p_j).$$

Định nghĩa 1.1.10 ([5, Mục 4])**.** Cho $X \subseteq \mathbb{P}^n$ là một đa tạp xạ ảnh và $p \in X$.

i. *Không gian tiếp xúc* của X tại một điểm $p \in X$, ký hiệu là T_pX, là đa tạp xạ ảnh xác định bởi các phương trình

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(x_j - p_j) = 0 \text{ với mọi } F \in \mathcal{I}(X).$$

ii. *Không gian tiếp xúc* của X, ký hiệu là T_X, là tập hợp

$$T_X = \{(p, y) \mid y \in T_pX\} \subseteq X \times \mathbb{P}^n.$$

Chú ý rằng không gian tiếp xúc của đa tạp xạ ảnh X tại p không phụ thuộc vào các phương trình xác định của đa tạp xạ ảnh X.

Định nghĩa 1.1.11. Một đa tạp xạ ảnh X được gọi là *trơn* tại điểm $p \in X$ nếu không gian tiếp xúc T_pX của X tại p có chiều bằng $\dim X$. Đa tạp X là trơn nếu nó trơn tại mọi điểm $p \in X$.

Định nghĩa 1.1.12 ([48, Mục 5.5]). Cho $X \subseteq \mathbb{P}^n$ là một đa tạp xạ ảnh. *Bậc* của đa tạp xạ ảnh X, ký hiệu là $\deg X$, là số giao điểm hữu hạn lớn nhất của X và một đa tạp tuyến tính tổng quát trong $\mathbb{P}^n$ có đối chiều bằng số chiều của X.

Ví dụ 1.1.3. Trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^2$, xét đa tạp X xác định bởi đa thức thuần nhất $yz - x^2$. Khi đó X có thể xem như một đường parabol trong $\mathbb{C}^2$. Do đó số giao điểm của X với một đường thẳng nhiều nhất là 2 hay $\deg X = 2$.

Việc tính toán bậc của một đa tạp xạ ảnh theo định nghĩa tương đối khó. Một cách đại số, chúng ta có thể tính toán bậc của một đa tạp xạ ảnh thông qua việc tính bậc của đa thức Hilbert của đa tạp xạ ảnh đó.

Với mọi số nguyên t, ký hiệu

$$\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_t = \{f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \mid f \text{ là đa thức thuần nhất bậc } t\ \} \cup \{0\}.$$

Khi đó $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_t$ là không gian vectơ có chiều $\binom{n+t}{t}$.

Cho X là một đa tạp xạ ảnh và $\mathcal{I}(X)$ là iđêan thuần nhất trên X. Ký hiệu

$$\mathcal{I}(X)_t = \mathcal{I}(X) \cap \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_t.$$

Khi đó $\mathcal{I}(X)_t$ là không gian vectơ con hữu hạn chiều của không gian $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_t$.

Định nghĩa 1.1.13 ([5, Mục 6]). Cho $X \subseteq \mathbb{P}^n$ là một đa tạp xạ ảnh. *Hàm Hilbert* của đa tạp xạ ảnh X, ký hiệu là $\mathrm{HF}_X(t)$, được định nghĩa bởi:

$$\begin{aligned} \mathrm{HF}_X \ :\ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ t &\longmapsto \dim \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_t / \mathcal{I}(X)_t. \end{aligned}$$

Với mọi t đủ lớn, hàm Hilbert của đa tạp xạ ảnh X xác định một đa thức

$$\mathrm{HP}_X(t) = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \cdots + a_d,$$

gọi là *đa thức Hilbert* của đa tạp xạ ảnh X.

Định nghĩa 1.1.14 ([5, Mục 6]). Cho $X \subseteq \mathbb{P}^n$ là đa tạp xạ ảnh.

i. *Chiều của đa tạp xạ ảnh* X, ký hiệu là $\dim(X)$, bằng bậc của đa thức $\mathrm{HP}_X(t)$.

ii. *Bậc của đa tạp xạ ảnh* X, ký hiệu là $\deg(X)$, bằng tích của $\dim(X)!$ và hệ số dẫn đầu của đa thức Hilbert $\mathrm{HP}_X(t)$.

Ví dụ 1.1.4.

i. Nếu $X = \mathbb{P}^n$ thì $\mathrm{HP}_{\mathbb{P}^n}(t) = \binom{t+n}{n}$. Do đó $\dim \mathbb{P}^n = n$ và $\deg(\mathbb{P}^n) = 1$.

ii. Nếu $X \subseteq \mathbb{P}^n$ là một siêu mặt với $\mathcal{I}(X) = \langle F \rangle$, $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ là một đa thức thuần nhất bậc d. Khi đó

$$\mathrm{HP}_X(t) = \binom{t+n}{n} - \binom{t-d+n}{n}.$$

Do đó $\dim X = n - 1$ và $\deg X = d$.

Định nghĩa 1.1.15 ([5, Mục 6])**.** *Giống* của một đa tạp xạ ảnh X, ký hiệu là $g(X)$, được định nghĩa bởi

$$g(X) := (-1)^{\dim(X)}(\mathrm{HP}_X(0) - 1).$$

Ví dụ 1.1.5. Cho $X \subseteq \mathbb{P}^2$ là đường cong phẳng bậc d. Khi đó, chúng ta có:

$$\mathrm{HP}_X(t) = \binom{t+2}{2} - \binom{t-d+2}{2} = dt + [1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2}].$$

Suy ra $\dim X = 1$. Do đó

$$g(X) = -[1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1] = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

1.1.2 Đa tạp Grassmann

Định nghĩa 1.1.16. ([20, Chương 3].) Cho V là một không gian vectơ n chiều trên trường $\mathbb{C}$ và k là các số nguyên dương sao cho $1 \leq k \leq n$. *Đa tạp Grassmann* $G(k, V)$ là tập hợp gồm tất cả các không gian vectơ con k chiều của không gian vectơ V, tức là

$$G(k, V) = \{W \subset V \mid \dim(W) = k\}.$$

Đặc biệt, $G(1, \mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{P}^n$. Như vậy, chúng ta có thể nói rằng khái niệm đa tạp Grassmann là một sự tổng quát của không gian xạ ảnh.

Vì một không gian con vectơ k chiều của không gian vectơ n chiều V được xem như là một không gian con tuyến tính $k-1$ chiều của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ nên đa tạp Grassmann $G(k, V)$ có thể xem như là tập tất cả các không gian con $k - 1$ chiều của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}(V)$. Theo cách hiểu này, đa tạp Grassmann $G(k, V)$ có thể được viết là $G(k - 1, \mathbb{P}(V))$. Hơn nữa, khi không cần xác định không gian vectơ V mà chỉ cần xác định chiều n của V thì chúng ta có thể viết đơn giản bởi $G(k, n)$ hoặc $G(k - 1, n - 1)$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ ra đa tạp Grassmann có cấu trúc của một đa tạp xạ ảnh thông qua phép nhúng Plücker. Để định nghĩa phép nhúng Plücker, chúng ta cần đến khái niệm luỹ thừa ngoài của một không gian vectơ.

Cho V là một không gian vectơ n chiều trên trường $\mathbb{C}$ với cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Với mọi $k = 1, \ldots, n$, *luỹ thừa ngoài thứ k của V* là không gian vectơ, ký hiệu là $\bigwedge^k V$, được xác định bởi

$$\bigwedge^k V = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} c_{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid c_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Cơ sở của $\bigwedge^k V$ được đánh chỉ số bởi các tập con với k phần tử

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}.$$

Do đó số chiều của $\bigwedge^k V$ là

$$\dim \left(\bigwedge^k V \right) = \binom{n}{k}.$$

Tích ngoài $\wedge$ là phép toán trên $\bigwedge^k V$ xác định như sau:

$$\begin{array}{cccc} \wedge & : & \bigwedge^k V \times \bigwedge^k V & \longrightarrow & \bigwedge^k V \\ & & (v, w) & \longmapsto & v \wedge w \end{array},$$

thỏa mãn các tiên đề sau đây:

i. $\wedge$ là tuyến tính theo từng thành phần, tức là

$$(r_1 v_1 + r_2 v_2) \wedge v = r_1(v_1 \wedge v) + r_2(v_2 \wedge v),$$

$$v \wedge (r_1 v_1 + r_2 v_2) = r_1(v \wedge v_1) + r_2(v \wedge v_2),$$

với mọi $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ và $v, v_1, v_2 \in V$;

ii. $\wedge$ là phản đối xứng, tức là

$$v \wedge w = -w \wedge v, \text{ với mọi } v, w \in V.$$

Đặc biệt, $v \wedge v = 0$, với mọi $v \in V$.

Mệnh đề 1.1.1 ([28, Hệ quả 11.26])**.** *Cho $\{v_1, \ldots, v_k\}, \{v'_1, \ldots, v'_k\}$ là hai họ các vectơ độc lập tuyến tính trong V và giả sử*

$$v'_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij} v_j, \text{ với mọi } i = 1, \ldots, k.$$

Khi đó

$$v_1' \wedge \cdots \wedge v_k' = \det(x_{ij})(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k).$$

Định nghĩa 1.1.17 ([20, Chương 3])**.** Ánh xạ

$$\begin{array}{rccl} p_{k,n} & : & G(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right) \\ & & \operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\} & \longmapsto & [v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] \end{array}$$

được gọi là *phép nhúng Plücker* .

Bây giờ ta sẽ chỉ ra ảnh của phép nhúng Plücker là một đa tạp xạ ảnh.

Giả sử $W \in G(k,n)$ là một không gian con k chiều của không gian vectơ n chiều V được sinh bởi k vectơ $v_1,\ldots,v_k \in V$ với các tọa độ của chúng được viết thành một ma trận cấp $k \times n$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}.$$

Khi đó các tọa độ thuần nhất của $p_{k,n}(W)$ trong $\mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right)$ là các định thức con cấp k của ma trận này, ký hiệu

$$P_{i_1,\ldots,i_k} = \det(x_{pi_q})_{1\le p,q\le k}, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n.$$

Các định thức con này được gọi là *tọa độ Plücker* của W.

Với mỗi hai dãy các số nguyên dương

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \le n,$$

$$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{k+1} \le n,$$

các phương trình sau được gọi là *quan hệ Plücker*

$$\sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} P_{i_1,\ldots,i_{k-1},j_l} P_{j_1,\ldots,\hat{j}_l,\ldots j_{k+1}} = 0,$$

trong đó $j_1,\ldots,\hat{j}_l,\ldots,j_{k+1}$ là dãy $j_1,\ldots,j_{k+1}$ với số hạng j_l bị bỏ đi.

Định lý 1.1.1 ([28, Định lý 11.35])**.** *Ảnh của phép nhúng Plücker $p_{k,n}(G(k,n))$ là một đa tạp xạ ảnh trong $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ xác định bởi iđêan sinh bởi các quan hệ Plücker.*

Ví dụ 1.1.6 ([20, Ví dụ 3.1])**.** Với $k = 2, n = 4$, ta có

$$\begin{array}{rccl} p_{2,4} & : & G(2,4) & \longrightarrow & \mathbb{P}\left(\bigwedge^2 V\right) = \mathbb{P}^5 \\ & & \operatorname{span}\{v_1, v_2\} & \longmapsto & [v_1 \wedge v_2] \end{array}.$$

Giả sử $W = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \in G(2,4)$, trong đó

$$v_1 = x_{11}e_1 + x_{12}e_2 + x_{13}e_3 + x_{14}e_4,$$

$$v_2 = x_{21}e_1 + x_{22}e_2 + x_{23}e_3 + x_{24}e_4.$$

Khi đó dạng ma trận của W là

$$W = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}.$$

Các tọa độ Plücker của W là

$$P_{1,2} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, \quad P_{1,3} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix}, \quad P_{1,4} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{14} \\ x_{21} & x_{24} \end{vmatrix},$$

$$P_{2,3} = \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}, \quad P_{2,4} = \begin{vmatrix} x_{12} & x_{14} \\ x_{22} & x_{24} \end{vmatrix}, \quad P_{3,4} = \begin{vmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{vmatrix}.$$

Do đó

$$p_{2,4}(W) = [P_{1,2} : P_{1,3} : P_{1,3} : P_{2,3} : P_{2,4} : P_{3,4}] \in \mathbb{P}^5.$$

Trong trường hợp này, chúng ta chỉ có một quan hệ Plücker

$$P_{1,2}P_{3,4} - P_{1,3}P_{2,4} + P_{1,4}P_{2,3} = 0.$$

Do đó, ảnh của đa tạp Grassmann $G(2,4)$ qua phép nhúng Plücker $p_{2,4}$ là một siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{P}^5$.

1.2 Cở sở của Lý thuyết giao

1.2.1 Vành Chow

Định nghĩa 1.2.1 ([20, Chương 1])**.** Cho X là đa tạp xạ ảnh trên trường $\mathbb{C}$ và k là một số nguyên không âm.

i. *Một k - chu trình* trên X là một tổng hình thức hữu hạn $\sum n_i[V_i]$, với V_i là các đa tạp con k - chiều của X và n_i là các số nguyên. Mỗi 1 - chu trình được gọi là một *ước*. Chu trình $\alpha = \sum n_i[V_i]$ được gọi là *hữu hiệu* nếu tất cả các hệ số n_i đều không âm.

ii. *Nhóm các k - chu trình* trên X, ký hiệu là $Z_k(X)$, là nhóm abel tự do sinh bởi các đa tạp con k - chiều của X.

iii. *Nhóm các chu trình* trên X là tổng trực tiếp của các nhóm k - chu trình trên X, ký hiệu là $Z_*(X)$, tức là

$$Z_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} Z_k(X).$$

Mỗi phần tử của nhóm $Z_*(X)$ được gọi là một chu trình trên X.

Định nghĩa 1.2.2 ([20, Chương 1])**.** Cho X là một đa tạp xạ ảnh, $V \subset X$ là một đa tạp con đối chiều một. Với mỗi $f \in \mathcal{O}_{X,V}$ khác không, *cấp* của f trên V, ký hiệu là $\mathrm{ord}_V(f)$, được định nghĩa bởi

$$\mathrm{ord}_V(f) := l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/(f)),$$

trong đó $l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/(f))$ là độ dài của $(\mathcal{O}_{X,V}/(f))$ trên vành địa phương $\mathcal{O}_{X,V}$.

Nếu φ là một hàm hữu tỉ khác không thuộc trường các hàm hữu tỉ $R(X)$ của X thì ta viết $\varphi = \dfrac{F}{G}$, trong đó $F, G \in \mathcal{O}_{X,V}$ và định nghĩa

$$\mathrm{ord}_V(\varphi) := \mathrm{ord}_V(F) - \mathrm{ord}_V(G).$$

Với bất kì đa tạp con $(k+1)$ - chiều W của X và $\varphi \in R(W)^*$ là một hàm hữu tỉ khác không bất kì. *Một k - chu trình của φ* trên X, ký hiệu là $[\mathrm{div}(\varphi)]$, được định nghĩa bởi

$$[\mathrm{div}(\varphi)] = \sum_V \mathrm{ord}_V(\varphi)[V] \in Z_k(X),$$

trong đó tổng trên chạy qua tất cả các đa tạp con V đối chiều một của W.

Định nghĩa 1.2.3 ([20, Chương 1])**.**

i. Một k-chu trình α được gọi là *tương đương hữu tỉ* với không, ký hiệu bởi $\alpha \sim 0$, nếu có một số hữu hạn các đa tạp con $(k+1)$ - chiều W_i của X và các hàm $\varphi_i \in R(W_i)$ khác không sao cho

$$\alpha = \sum_i [\mathrm{div}(\varphi_i)].$$

ii. Hai k - chu trình α và β được gọi là *tương đương hữu tỉ*, ký hiệu là $\alpha \sim \beta$, nếu chu trình $\alpha - \beta$ tương đương hữu tỉ với 0.

Vì $[\operatorname{div}(\varphi^{-1})] = -[\operatorname{div}(\varphi)]$ nên tập tất cả các k - chu trình sao cho mỗi k - chu trình là tương đương hữu tỉ với 0 lập thành một nhóm con của $Z_k(X)$, ta ký hiệu nhóm con này bởi $\operatorname{Rat}_k(X)$. Khi đó với mỗi số nguyên dương k, ta có nhóm thương

$$A_k(X) = Z_k(X)/\operatorname{Rat}_k(X).$$

Định nghĩa 1.2.4 ([20, Chương 1])**.** Với các ký hiệu ở trên, nhóm

$$A_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} A_k(X),$$

được gọi là *nhóm Chow* của X. Mỗi phần tử của nhóm $A_*(X)$ được gọi là một *lớp chu trình* trên X.

Chú ý 1.2.1. Nếu X là đa tạp xạ ảnh có $\dim X = n$. Vì không tồn tại đa tạp con của X có số chiều $n+1$ nên $\operatorname{Rat}_n(X) = 0$. Vì vậy $A_n(X) \cong \mathbb{Z}_n[X]$. Hơn nữa, mỗi đa tạp con của X mà khác X điều có chiều bé hơn n, nên tập các n - chu trình chính là $\mathbb{Z} \cdot [X]$. Do đó

$$A_n(X) \cong \mathbb{Z} \cdot [X].$$

Nếu $k < 0$ hoặc $k > n$ thì ta có $A_k(X) = 0$. Đối với mỗi k, chúng ta đặt

$$A^k(X) = A_{n-k}(X)$$

và

$$A^*(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} A^k(X).$$

Trong phạm vi của luận án, chúng ta sẽ viết $A(X)$ thay vì $A_*(X)$ hoặc $A^*(X)$ khi sự phân biệt của chúng không đóng vai trò quan trọng.

Tiếp theo, chúng ta xây dựng một cấu trúc vành trên $A(X)$.

Định nghĩa 1.2.5 ([20, Chương 1])**.**

Cho X là một đa tạp xạ ảnh và A, B là các đa tạp con của X.

i. Hai đa tạp con A và B được gọi là *giao hoành* tại điểm $p \in A \cap B$ nếu chúng trơn tại p và

$$T_pA + T_pB = T_pX.$$

ii. Hai đa tạp con A và B được gọi là *hoành tổng quát* nếu chúng là giao hoành tại một điểm tổng quát của mỗi tập con $C \subseteq A \cap B$.

iii. Hai chu trình $\sum m_i[A_i]$ và $\sum n_j[B_j]$ được gọi là hoành tổng quát nếu A_i và B_j là hoành tổng quát với mọi i và j.

Bổ đề 1.2.1 ([20, Chương 1])**.** *Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn. Khi đó*

i. Với mọi $\alpha, \beta \in A(X)$ luôn tồn tại hai chu trình hoành tổng quát $A = \sum m_i[A_i]$ và $B = \sum n_j[B_j]$ trong $Z(X)$ lần lượt đại diện cho α và β.

ii. Lớp chu trình

$$\sum_{i,j} m_i n_j [A_i \cap B_j]$$

trong $A(X)$ không phụ thuộc vào cách chọn A và B.

Định lý 1.2.1 ([20, Chương 1])**.** *Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn. Khi đó tồn tại duy nhất một phép nhân trên $A(X)$ thỏa mãn điều kiện:*

$$[A].[B] = [A \cap B],$$

trong đó A và B là hai đa tạp con của X hoành tổng quát.

Phép nhân này làm cho $A(X)$ trở thành một vành phân bậc, kết hợp và giao hoán, được gọi là vành Chow của đa tạp X.

Ví dụ 1.2.1. ([20, Định lý 2.1]). Vành Chow của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ là

$$A(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1}).$$

trong đó h là lớp siêu phẳng của $\mathbb{P}^n$.

Chúng ta cần có khái niệm bậc của một lớp chu trình trong nhóm Chow.

Cho $f : X \to Y$ là một đồng cấu riêng. Lấy V là một đa tạp con k - chiều bất kì của X. Đặt $W = f(V)$ và ký hiệu $R(V), R(W)$ lần lượt là trường các hàm hữu tỉ của V và W. Nếu $\dim W = k$ thì trường mở rộng $R(V)/R(W)$ là hữu hạn. Từ đó, chúng ta định nghĩa đồng cấu $f_* : Z_k(X) \to Z_k(Y)$ xác định bởi

$$f_*[V] = \begin{cases} [R(V) : R(W)][W] & \text{nếu } \dim W = k \\ 0 & \text{nếu } \dim W < k \end{cases},$$

trong đó $[R(V) : R(W)]$ được ký hiệu là bậc của trường mở rộng $R(V)/R(W)$.

Định lý 1.2.2 ([22, Chương 1])**.** *Nếu $f : X \to Y$ là một đồng cấu riêng và α là một k - chu trình trên X tương đương hữu tỉ với không thì $f_*(\alpha)$ là một k - chu trình tương đương hữu tỉ với không trên Y.*

Theo Định lí 1.2.2, ta có đồng cấu cảm sinh của các nhóm Chow

$$f_* : A_k(X) \to A_k(Y).$$

Vì vậy chúng ta có đồng cấu

$$f_* : A_*(X) \to A_*(Y).$$

được gọi là *đồng cấu đẩy ra* liên kết với f.

Định nghĩa 1.2.6 ([22, Chương 1])**.** Cho X là là đa tạp xạ ảnh trơn n chiều trên trường $\mathbb{C}$ và α là một 0 - chu trình trên X. *Bậc của chu trình* α, ký hiệu là $\int_X \alpha$, được xác định bởi

$$\int_X \alpha = p_*(\alpha),$$

trong đó $p : X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ và

$$A_0(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z} \cdot [\mathrm{Spec}(\mathbb{C})]$$

đồng nhất với $\mathbb{Z}$.

Nếu $\alpha = \sum_i n_i[p_i]$ với p_i là một điểm thuộc X thì bậc của α

$$\int_X \alpha = \sum_i n_i.$$

Theo Định lý 1.2.2, định nghĩa bậc như trên là định nghĩa tốt với các 0 - chu trình. Vì thế, chúng ta có thể mở rộng đồng cấu bậc cho tất cả các chu trình trong $A_*(X)$,

$$\int_X : A_*(X) \to \mathbb{Z}$$

bởi định nghĩa $\int_X \alpha = 0$ nếu $\alpha \in A_k(X), k > 0$.

Với bất kì đồng cấu $f : X \to Y$ của các đa tạp xạ ảnh trơn và với bất kì $\alpha \in A_*(X)$, ta có

$$\int_X \alpha = \int_Y f_*(\alpha).$$

Lấy $f : X \to Y$ là một đồng cấu phẳng có chiều quan hệ n và W là một đa tạp con k - chiều của Y. Khi đó $f^{-1}(W)$ là một đa tạp con chiều $k + n$ của X. Chúng ta đặt

$$f^*[W] = [f^{-1}(W)].$$

Khi đó, chúng ta có thể mở rộng tuyến tính đến đồng cấu

$$f^* : Z_k(Y) \to Z_{k+n}(X).$$

Định lý 1.2.3 ([22, Chương 1]). *Cho $f : X \to Y$ là một đồng cấu phẳng có chiều tương đối n và α là một k - chu trình trên Y tương đương hữu tỉ với không. Khi đó, $f^*(\alpha)$ cũng là một $(k+n)$ - chu trình tương đương hữu tỉ với không trong $Z_{k+n}(X)$.*

Theo Định lý 1.2.3, ta có đồng cấu cảm sinh của nhóm Chow

$$f^* : A_k(Y) \to A_{k+n}(X).$$

Vì vậy chúng ta có đồng cấu

$$f^* : A_*(Y) \to A_*(X),$$

được gọi là *đồng cấu kéo về* liên kết với f.

1.2.2 Phân thớ vectơ

Định nghĩa 1.2.7. ([5, Mục 7]). Cho X là một đa tạp xạ ảnh trên trường $\mathbb{C}$. Một *phân thớ vectơ* hạng r trên X là một bộ ba (E, X, π), trong đó E là một đa tạp xạ ảnh và $\pi\colon E \longrightarrow X$ là một đồng cấu sao cho tồn tại một phủ mở $\{U_i\}$ của X thỏa mãn các điều kiện sau:

i. Với mọi $i \in I$, tồn tại một đẳng cấu $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r$ sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & U_i \times \mathbb{C}^r \arrow[d, "p"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

trong đó $p : U_i \times \mathbb{C}^r \to U_i$ là một phép chiếu tự nhiên.

ii. Với mọi $i, j \in I$, tồn tại một ma trận $(g_{ij})_{r\times r}$ với các phần tử là các hàm trên $U_i \cap U_j$ sao cho đồng cấu hợp thành

$$\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r$$

xác định bởi $\psi_{ij}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v)$.

Người ta gọi phân thớ vectơ (E, X, π) đơn giản bởi E hoặc $\pi\colon E \longrightarrow X$. Với mỗi $x \in X$, tập $\pi^{-1}(x)$ được gọi là *thớ* tại x và được ký hiệu là E_x. Một phân thớ vectơ có hạng bằng 1 được gọi là một *phân thớ đường thẳng*.

Từ định nghĩa của phân thớ vectơ, ta thấy với mỗi $x \in X$, thớ $\pi^{-1}(x)$ có cấu trúc của một không gian vectơ. Do đó, mỗi phân thớ vectơ có thể được xem như là một họ các không gian vectơ được tham số hóa bởi một đa tạp xạ ảnh.

Chú ý rằng, các phần tử g_{ij} xác định như trong Định nghĩa 1.2.7 được gọi là các hàm chuyển. Các hàm chuyển là không duy nhất với mọi phân thớ vectơ. Tuy nhiên, ta có thể xây dựng được một phân thớ vectơ từ các hàm chuyển.

Định nghĩa 1.2.8. ([5, Mục 7]). Một *nhát cắt* của phân thớ vectơ $\pi\colon E \longrightarrow X$ là một đồng cấu $s\colon X \longrightarrow E$ sao cho $s(x) = \pi^{-1}(x)$ với mọi $x \in X$. Ta cũng có định nghĩa tương tự cho nhát cắt của phân thớ vectơ π trên một tập con $U \subseteq X$. Tập hợp các nhát cắt của π trên U được ký hiệu bởi $\mathcal{E}(U)$. Một nhát cắt của π trên X được gọi là một *nhát cắt toàn cục*. Tập hợp các nhát cắt toàn cục của π được ký hiệu bởi $H^0(X, E)$.

Ví dụ 1.2.2. ([5, Mục 7]). Mọi phân thớ vectơ (E, X, π) đều có duy nhất một nhát cắt xác định bởi

$$\begin{array}{rcrcl} s & : & U_i & \longrightarrow & E \\ & & x & \longmapsto & \psi_i^{-1}(x, 0), \end{array}$$

trong đó U_i là một phủ mở bất kỳ chứa x và 0 là phần tử không trong không gian vectơ $\mathbb{C}^n$. Nhát cắt này gọi là *nhát cắt không điểm* của phân thớ vectơ E.

Định nghĩa 1.2.9. ([5, Mục 7]). Phân thớ $\pi\colon E \longrightarrow X$ được gọi là *phân thớ toàn cục* nếu E sinh bởi tập các nhát cắt toàn cục, tức là, tồn tại một không gian vectơ con $V \subseteq H^0(X, E)$ sao cho V sinh ra toàn bộ các thớ E_x với $x \in X$. Một cách tương đương, ánh xạ định giá tại mọi điểm $x \in X$, $\mathrm{ev} : H^0(X, E) \longrightarrow E_x$ là một toàn cấu.

Định nghĩa 1.2.10. ([5, Mục 7]). Cho E là một phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh X. Một tập con $F \subseteq E$ được gọi là một *phân thớ con* hạng k của E nếu tồn tại một không gian vectơ k - chiều $V \subseteq \mathbb{C}^r$ và với mỗi $x \in X$, tồn tại một lân cận $U = U(x)$ với đẳng cấu $\psi\colon E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$ sao cho $\psi^{-1}(U \times V) = F|_{U(x)}$.

Vì V là một không gian vectơ con của $\mathbb{C}^r$ nên ta có thể giả sử $\mathbb{C}^r = V \oplus W$. Định nghĩa $\overline{\psi}\colon (E/F)|_U \longrightarrow U \times W$ xác định bởi

$$\overline{\psi}([v]) = \mathrm{pr}_2(\psi(v)),$$

trong đó $\mathrm{pr}_2\colon V \oplus W \longrightarrow W$ là phép chiếu lên thành phần thứ hai. Như vậy, E/F là một phân thớ vectơ, gọi là *phân thớ thương* của E tạo ra bởi phân thớ con F.

Ví dụ 1.2.3. ([5, Mục 7]). Giả sử $\pi\colon E \longrightarrow X$ là một phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh X với các đẳng cấu $\psi\colon \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{C}^r$ và các hàm chuyển g_{ij}. Khi đó, các hàm chuyển $g'_{ij} := g_{ji}^T$ cho ta *phân thớ đối ngẫu* $\pi'\colon E^* \longrightarrow X$.

Ví dụ 1.2.4. ([5, Mục 7]). Cho X là một đa tạp xạ ảnh và r là một số nguyên dương. Khi đó, phép chiếu lên thành phần thứ nhất $\pi\colon X \times \mathbb{C}^r \longrightarrow X$ định nghĩa một phân thớ vectơ hạng r trên X, gọi là phân thớ tầm thường hạng r trên X.

Khi $X = \mathbb{P}^n$, chúng ta ký hiệu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ là phân thớ tầm thường trên $\mathbb{P}^n$. Nhận xét rằng $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ là một phân thớ đường thẳng. Giả sử s là một nhát cắt của $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$. Khi đó ta có một đồng cấu $s'\colon \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ cho bởi $s'(x) = \pi_2(s(x))$, trong đó $\pi_2\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ là phép chiếu lên thành phần thứ hai. Khi đó, s là ánh xạ hằng. Vậy các nhát cắt của phân thớ E là các ánh xạ hằng và do đó ta có đẳng cấu $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \simeq \mathbb{C}$ như các $\mathbb{C}$ - đại số.

Ví dụ 1.2.5. ([5, Mục 10]). Cho E là một phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh X. Với mỗi $x \in X$, ta xác định một không gian xạ ảnh $\mathbb{P}(E_x)$. Cố định một đẳng cấu $\pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$, ta có một ánh xạ

$$\bigcup_{x \in U_i} \mathbb{P}(E_x) \longrightarrow U_i \times \mathbb{P}^{r-1}.$$

Đặt $\mathbb{P}(E) = \bigcup_{x \in X} \mathbb{P}(E_x)$. Khi đó, $\mathbb{P}(E)$ có cấu trúc của một phân thớ vectơ gọi là *phân thớ xạ ảnh* liên kết với E.

Mệnh đề 1.2.1 ([5, Hệ quả 10.2.4])**.** *Cho E là phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh X và $p\colon \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ là phân thớ xạ ảnh liên kết. Khi đó $p_* : A_*(\mathbb{P}(E)) \to A_*(X)$ là toàn ánh và $p^* : A_*(X) \to A_*(\mathbb{P}(E))$ là đơn ánh.*

Ví dụ 1.2.6. ([5, Mục 10]). Cho (E_1, π_1) và (E_2, π_2) là hai phân thớ vectơ trên đa tạp xạ ảnh X có hạng lần lượt là r_1 và r_2. Giả sử $\{U_i\}$ là một phủ mở của X sao cho các đẳng cấu ứng với E_1 và E_2 lần lượt là $\{U_i,\ \phi_i\}$ và $\{U_i,\ \psi_i\}$.

Ta định nghĩa *tổng Whitney* (hay tổng trực tiếp) của E_1 và E_2, ký hiệu bởi $(E_1 \oplus E_2, X, \pi)$, là một phân thớ vectơ trên X xác định bởi $E_1 \oplus E_2 = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)\}$ và phép chiếu

$$(x_1, x_2) \longmapsto (\pi_1(x_1); \mathrm{pr}_2 \circ \phi_i(x_1), \mathrm{pr}_2 \circ \psi_i(x_2)) \in U_i \times \mathbb{C}^r,$$

trong đó $r = r_1 + r_2$ và pr_2 là phép chiếu lên thành phần thứ hai.

Nếu g_{ij} và g'_{ij} lần lượt là các hàm chuyển của E_1 và E_2 thì ma trận

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g'_{ij} \end{pmatrix}$$

định nghĩa các hàm chuyển của $E_1 \oplus E_2$.

Ví dụ 1.2.7. ([5, Mục 10]) Cho (E_1, π_1) và (E_2, π_2) là hai phân thớ vectơ trên đa tạp xạ ảnh X có hạng lần lượt là r_1 và r_2. Giả sử U_i là một phủ mở của X với các đẳng cấu $\phi_i \colon U_i \times \mathbb{C}^{r_1} \longrightarrow U_i$ và $\psi_i \colon U_i \times \mathbb{C}^{r_2} \longrightarrow U_i$. Xét tập hợp

$$E_1 \otimes E_2 = \coprod_{x \in X} (E_1)_x \otimes (E_2)_x.$$

Khi đó, ta xây dựng các ánh xạ

$$\begin{array}{rcccl} \phi_i \otimes \psi_i & : & U_i \times (\mathbb{C}^{r_1} \otimes \mathbb{C}^{r_2}) & \longrightarrow & U_i = \displaystyle\coprod_{x \in U_i} (E_1)_x \otimes (E_2)_x \\ & & (x, u) & \longmapsto & (\phi_i(x, -) \otimes \psi_i(x, -))(u). \end{array}$$

Các ánh xạ này xác định một phân thớ vectơ hạng $r_1.r_2$ trên X, gọi là *tích tenxơ* của hai phân thớ E_1 và E_2 và được ký hiệu là $E_1 \otimes E_2$.

Ví dụ 1.2.8. ([5, Mục 10]). Cho E là một phân thớ vectơ. Khi đó ta định nghĩa *lũy thừa ngoài* bậc k của phân thớ vectơ E bởi

$$\Lambda^k E := \coprod_{x \in X} \Lambda^k E_x,$$

trong đó E_x là thớ tại $x \in X$.

Ví dụ 1.2.9. ([5, Mục 10]). Trên $\mathbb{C}^{n+1}$ ký hiệu tọa độ bởi $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$. Trên $\mathbb{P}^n$ ký hiệu tọa độ xạ ảnh bởi $(x_0 : \ldots : x_n)$. Ta định nghĩa tập hợp

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) := \{(x, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \ z \text{ nằm trên đường thẳng tương ứng với } x\}.$$

Xét phép chiếu lên thành phần thứ nhất $\pi \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ xác định bởi

$$\pi(x, z) = x \text{ với mọi } (x, z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1).$$

Với mọi $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, tạo ảnh $\pi^{-1}(x)$ là đường thẳng trong $\mathbb{C}^{n+1}$ tương ứng với điểm x, tức là $\pi^{-1}(x) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$.
Với mỗi phủ mở U_i, ánh xạ $\psi_i \colon \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$ xác định bởi

$$\psi_i(x, z) = (x, z_i) \text{ với mọi } (x, z) \in \pi^{-1}(U_i)$$

là một đẳng cấu với ánh xạ ngược $\psi_i^{-1}\colon U_i \times \mathbb{C} \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ xác định bởi

$$\psi_i^{-1}(x, \lambda) = \left(x, \lambda\left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right).$$

Trên $U_i \cap U_j$ ta có ánh xạ tuyến tính $\psi_i \circ \psi_j^{-1}\colon (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}$ xác định bởi

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1}(x, \lambda) = \left(x, \lambda\frac{x_i}{x_j}\right).$$

Do đó $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ là một phân thớ đường thẳng trên $\mathbb{P}^n$ với các hàm chuyển $g_{ij} = \dfrac{x_i}{x_j}$.

Chú ý rằng, phân thớ đường thẳng $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ trên $\mathbb{P}^n$ là phân thớ con của phân thớ tầm thường $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Mặt khác, phân thớ đối ngẫu của phân thớ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, ký hiệu bởi $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, là phân thớ vectơ xác định bởi các hàm chuyển $g_{ij} = \dfrac{x_j}{x_i}$. Phân thớ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ thường được xem như là phân thớ siêu phẳng trên $\mathbb{P}^n$ và được xác định bởi

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = [h],$$

với h là siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$.

Theo [45, Chương 1], với mỗi số nguyên $m \in \mathbb{Z}$, ta định nghĩa:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes m} & \text{nếu } m > 0, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\otimes |m|} & \text{nếu } m \leq 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1.2.10. ([5, Mục 7]). Trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, ta định nghĩa một *dạng vi phân* trên các phủ mở U_i là một biểu thức có dạng

$$\omega = f_0 d\left(\frac{x_0}{x_i}\right) + f_1 d\left(\frac{x_1}{x_i}\right) + \cdots + f_{i-1} d\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right) + f_{i+1} d\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) + \cdots + f_n d\left(\frac{x_n}{x_i}\right),$$

trong đó $f_0, f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n$ là các hàm chính quy theo các biến $\dfrac{x_0}{x_i}, \dfrac{x_1}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_{i-1}}{x_i}, \dfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}$.

Trên mỗi tập $U_i \cap U_j$, với mỗi $k \neq i$, ta viết

$$d\left(\frac{x_k}{x_i}\right) = d\left(\frac{\frac{x_k}{x_j}}{\frac{x_i}{x_j}}\right) = \frac{x_j}{x_i} d\left(\frac{x_k}{x_j}\right) - \frac{x_k x_j}{x_i^2} d\left(\frac{x_i}{x_j}\right).$$

Từ đó suy ra

$$\omega = \frac{x_j}{x_i}\left[f_0 d\left(\frac{x_0}{x_j}\right) + \cdots + \left(-\frac{x_0}{x_i} f_0 - \cdots - \frac{x_{i-1}}{x_i} f_{i-1} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{x_{i+1}}{x_i} f_{i+1} - \cdots - \frac{x_n}{x_i} f_n\right) d\left(\frac{x_i}{x_j}\right) + \cdots + f_n d\left(\frac{x_n}{x_j}\right)\right].$$

Khi đó, ma trận

$$A_{ij} = \frac{x_j}{x_i}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\frac{x_0}{x_i} & -\frac{x_1}{x_i} & \dots & -\frac{x_j}{x_i} & \dots & -\frac{x_n}{x_i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

là hàm chuyển xác định một phân thớ vectơ trên $\mathbb{P}^n$, gọi là *phân thớ đối tiếp xúc* của $\mathbb{P}^n$, ký hiệu phân thớ này là $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}$. Phân thớ đối ngẫu của phân thớ đối tiếp xúc được gọi là *phân thớ tiếp xúc* của $\mathbb{P}^n$, ký hiệu là $T_{\mathbb{P}^n}$, tức là $T_{\mathbb{P}^n} = \left(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}\right)^*$.

Ví dụ 1.2.11 ([20, Mục 3.2.3])**.** Cho V là không gian vectơ n - chiều và $G = G(k, V)$ là đa tạp Grassmann của các không gian vectơ con k chiều của không gian vectơ n chiều V. Đặt $\mathcal{V} = G \times V$ là phân thớ tầm thường hạng n trên G với mỗi thớ của nó tại mọi điểm chính là không gian vectơ V. Chúng ta ký hiệu $\mathcal{S}$ là phân thớ con hạng k của $\mathcal{V}$ với mỗi thớ của nó tại $W \in G$ chính là không gian con W của V. Phân thớ thương $\mathcal{Q}$ của $\mathcal{V}$ là phân thớ vectơ hạng $n-k$ với mỗi thớ của nó tại $W \in G$ là không gian thương V/W. Phân thớ $\mathcal{S}$ còn được gọi là phân thớ con phổ dụng trên G và phân thớ $\mathcal{Q}$ còn được gọi là phân thớ thương phổ dụng trên G.

Mệnh đề 1.2.2 ([20, Định lý 3.5])**.** *Phân thớ tiếp xúc T_G trên đa tạp Grassmann $G = G(k, V)$ đẳng cấu với $Hom_g(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$, ở đây $\mathcal{S}, \mathcal{Q}$ lần lượt là phân thớ con phổ dụng và phân thớ thương phổ dụng trên G, nghĩa là*

$$T_G \cong Hom_g(\mathcal{S}, \mathcal{Q}) = \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{Q}.$$

Ví dụ 1.2.12. ([5, Mục 7]). Cho $h \subseteq \mathbb{P}^n$ là một siêu phẳng. Khi đó ta có dãy khớp ngắn các phân thớ

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_h \longrightarrow 0,$$

trong đó $\mathcal{O}_h$ là phân thớ tầm thường trên siêu phẳng h.

Xem $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ như là một phân thớ con của phân thớ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)}$, ta có *dãy khớp Euler* trong $\mathbb{P}^n$ là

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0,$$

trong đó $T_{\mathbb{P}^n}$ là phân thớ tiếp xúc trên đa tạp xạ ảnh $\mathbb{P}^n$.

1.2.3 Lớp Chern và lớp Segre của phân thớ vectơ

Định nghĩa 1.2.11 ([20, Chương 5]). Nếu E là một phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh X và $p\colon \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ là phân thớ xạ ảnh liên kết thì $p^*(E)$ chứa một phân thớ đường thẳng L định nghĩa bởi

$$L = \{(l, v) \in \mathbb{P}(E) \times E : v \in L\}.$$

Lấy $s \in A_1(\mathbb{P}(E))$ là lớp chu trình tương ứng với phân thớ đường thẳng $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. Theo ([20, Định lý 9.6]), $A^*(\mathbb{P}(E)$ là $A^*(X)$ - môđun tự do với cơ sở $\{1, s, \ldots, s^{r-1}\}$, nghĩa là, với mọi lớp chu trình $y \in A^*(\mathbb{P}(E))$ có một biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$y = \sum_{k=1}^{r} p^*(x_k) s^{r-k},$$

trong đó $x_k \in A^*(X)$. Đặc biệt, luôn tồn tại $x_k \in A^k(X)$ sao cho

$$s^r = -\sum_{k=1}^{r} p^*(x_k) s^{r-k}.$$

Lớp Chern thứ k của phân thớ vectơ E, ký hiệu bởi $c_k(E)$, được định nghĩa như sau:

$$c_k(E) := x_k \in A^k(X), \text{ với mọi } k = 1, \ldots, r.$$

Lớp Chern toàn phần của phân thớ vectơ E, ký hiệu là $c(E)$, được định nghĩa bởi

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_r(E).$$

Lớp Segre thứ k của phân thớ vectơ E, ký hiệu bởi $s_k(E)$, được định nghĩa theo phương pháp truy hồi như sau:

$$s_k(E) + s_{k-1}(E)c_1(E) + \ldots + s_1(E)c_{k-1}(E) + c_k(E) = 0, \text{ với mọi } k = 1, \ldots, r.$$

Theo định nghĩa, ta có:

$$\begin{aligned}
&s_1(E) = -c_1(E),\\
&s_2(E) = c_1(E)^2 - c_2(E),\\
&s_3(E) = -c_1(E)^3 + 2c_1(E)c_2(E) - c_3(E)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Lớp Segre toàn phần của phân thớ vectơ E được định nghĩa bởi tổng

$$s(E) = 1 + s_1(E) + \ldots + s_r(E).$$

Mệnh đề 1.2.3 ([22, Chương 3])**.** *Lớp Chern thỏa mãn các tính chất sau đây:*

i. Với mọi phân thớ vectơ E hạng r trên đa tạp xạ ảnh X, ta có

$$c_0(E) = 1 \text{ và } c_k(E) = 0, \text{ với mọi } k > r.$$

ii. Nếu $E^* = Hom(E, \mathbb{C})$ là phân thớ đối ngẫu của phân thớ vectơ E hạng r trên đa tạp xạ ảnh X thì

$$c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E) \text{ với mọi } k = 1, \ldots, r.$$

iii. Nếu E và F là hai phân thớ vectơ trên đa tạp xạ ảnh X thì

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F).$$

Tương đương, ta có

$$c_k(E \oplus F) = \sum_{i=0}^{k} c_i(E)c_{k-i}(F).$$

Mệnh đề 1.2.4. *([5, Mục 10]). Giả sử $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ là một dãy khớp ngắn các phân thớ vectơ trên đa tạp xạ ảnh X. Khi đó*

$$c(E) = c(E').c(E'').$$

1.3 Phép tính Schubert

Cho đa tạp Grassmann $G(k, n)$ gồm tất cả các không gian con k chiều của không gian vectơ n chiều V.

Lấy $\mathcal{V}$ là một cờ trong V, tức là một dãy lồng nhau các không gian con của V

$$0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V,$$

trong đó $\dim V_i = i$ với mọi i.

Với mỗi dãy các số nguyên $a = (a_1, \ldots, a_k)$ thỏa

$$n - k \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0,$$

Chu trình Schubert, ký hiệu là $\Sigma_a(\mathcal{V})$, được định nghĩa như sau:

$$\Sigma_a(\mathcal{V}) := \{W \in G(k, n) : \dim(V_{n-k+i-a_i} \cap W) \geq i, \forall i = 1, \ldots, k\}.$$

Người ta đã chỉ ra rằng, chu trình Schubert là một đa tạp con của đa tạp Grassmann $G(k, n)$ với đối chiều $\sum_{i=1}^{k} a_k$. Theo [20], lớp chu trình $[\Sigma_a(\mathcal{V})]$ không phụ thuộc vào việc chọn $\mathcal{V}$. Khi đó, chúng ta định nghĩa *lớp Schubert* tương ứng với a là

$$\sigma_a := [\Sigma_a(\mathcal{V})].$$

Để thuận tiện, chúng ta viết Σ_a thay cho $\Sigma_a(\mathcal{V})$, viết $\Sigma_{a_1,\ldots,a_s}$, $\sigma_{a_1,\ldots,a_s}$ khi $a = (a_1,\ldots,a_s,0,\ldots,0)$ và Σ_{p^i}, σ_{p^i} khi $a = (p,\ldots,p,0,\ldots,0)$ với i thành phần đầu tiên bằng p. Các lớp chu trình σ_i, $i = 1,\ldots,n-k$ và σ_{1^i}, $i = 1,\ldots,k$ được gọi là các *lớp Schubert đặc biệt.*

Theo [20, Bổ đề 4.5], các lớp Schubert σ_a tạo thành một tập sinh cho vành Chow của đa tạp Grassmann $G(k,n)$. Phép nhân trong vành Chow $A(G(k,n))$ được xác định bởi các công thức sau:

Bổ đề 1.3.1 ([20, Hệ quả 4.2])**.** *Đặt $G = G(k,n)$. Khi đó*

$$(\sigma_{1^k})^{n-k} = (\sigma_{n-k})^k = \sigma_{(n-k)^k} \in A^{k(n-k)}(G).$$

Mệnh đề 1.3.1 ([20, Mệnh đề 4,6])**.** *Nếu $|a| + |b| = k(n-k)$, ta có*

$$\sigma_a \cdot \sigma_b = \begin{cases} \sigma_{(n-k)^k} & \textit{nếu } a_i + b_{k-i} = n-k \textit{ với mọi } i, \\ 0 & \textit{ngược lại.} \end{cases}$$

Mệnh đề 1.3.2 (([20, Mệnh đề 4.9])**.** *(Công thức Pieri). Với mỗi lớp Schubert $\sigma_a \in A(G(k,n))$ và mỗi số nguyên i sao cho $0 \le i \le n-k$, ta có*

$$\sigma_a \cdot \sigma_i = \sum_c \sigma_c,$$

trong đó tổng là tất cả c với $n-k \ge c_1 \ge a_1 \ge c_2 \ge \cdots \ge c_k \ge a_k \ge 0$, và $|c| = |a| + i$.

Mệnh đề 1.3.3 ([20, Mệnh đề 4.16])**.** *(Công thức Giambelli). Với mỗi $a = (a_1,\ldots,a_k)$ sao cho $n-k \ge a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_k \ge 0$, ta có*

$$\sigma_a = \det(\sigma_{a_i+j-i})_{1\le i,j\le k},$$

trong đó $\sigma_0 = 1$ và $\sigma_m = 0$ với $m < 0$ hoặc $m > n-k$.

Công thức của Pieri cho chúng ta cách xác định tích của một lớp Schubert tùy ý và một lớp Schubert đặc biệt. Công thức Giambelli cho chúng ta cách biểu diễn một lớp Schubert bất kì theo các lớp Schubert đặc biệt. Do đó, kết hợp cả hai công thức trên, chúng ta có thể xác định được tích của hai lớp Schubert tùy ý.

Định lý 1.3.1 ([20, Định lý 5.26])**.** *Vành chow của đa tạp Grassmann $G(n,k)$ được xác định như sau*

$$A(G(n,k)) \cong \frac{\mathbb{Z}[\sigma_1,\dots,\sigma_{n-k}]}{I},$$

trong đó I là iđêan sinh bởi $n-k$ đa thức $f_m \in \mathbb{Z}[\sigma_1,\dots,\sigma_{n-k}], m = 1,\dots,n-k$, và đa thức f_m là đa thức xác định bởi công thức Giambelli như sau:

$$f_m = \sigma_{1^{k+m}} = \det(\sigma_{1+j-i})_{1\le i,j\le k+m}.$$

Ví dụ 1.3.1. Lấy V là không gian 4 chiều và $k=2$. Chúng ta sẽ mô tả vành Chow của đa tạp Grassmann $G(2,4)$.

Lấy $\mathcal{V}$ là một cờ trong V, tức là một dãy lồng nhau các không gian con của V

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 = V,$$

trong đó $\dim V_i = i$ với mọi $i = 1,\dots,4$.

Với mỗi dãy các số nguyên $a = (a_1,a_2)$ thỏa

$$2 \ge a_1 \ge a_2 \ge 0,$$

ta có chu trình Schubert

$$\Sigma_a(\mathcal{V}) = \{W \in G(2,4) : \dim(V_{3-a_1}\cap W) \ge 1, \dim(V_{4-a_2}\cap W) \ge 2\}.$$

Suy ra ta có 6 lớp Schubert sau:

$$\begin{aligned}
&1 = [\Sigma_{0,0}] = G(2,4),\\
&\sigma_1 = [\Sigma_{1,0}] = \{W : V_2 \cap W) \ne 0\},\\
&\sigma_2 = [\Sigma_{2,0}] = \{W : V_1 \subseteq W\},\\
&\sigma_{1,1} = [\Sigma_{1,1}] = \{W : W \subseteq V_3\},\\
&\sigma_{2,1} = [\Sigma_{2,1}] = \{W : V_1 \subseteq W \subset V_3\},\\
&\sigma_{2,2} = [\Sigma_{2,2}] = \{W : W = V_2.\}
\end{aligned}$$

Theo công thức Pieri, ta có

$$\begin{aligned}
&\sigma_1\cdot\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_{1,1},\\
&\sigma_1\cdot\sigma_2 = \sigma_1\cdot\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1},\\
&\sigma_1\cdot\sigma_{2,1} = \sigma_2\cdot\sigma_2 = \sigma_{2,2}.
\end{aligned}$$

Theo công thức Giambelli, ta có

$$\sigma_{1,1} = \det\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2\\ 1 & \sigma_1\end{pmatrix} = \sigma_1^2 - \sigma_2,$$

$$\sigma_{2,1} = \det \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 1 & \sigma_1 \end{pmatrix} = \sigma_1\sigma_2,$$

$$\sigma_{2,2} = \det \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \sigma_2^2.$$

Vành Chow của đa tạp Grassmann $G(2,4)$ là

$$A(G(2,4)) \cong \frac{\mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]}{\{\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2\}},$$

1.4 Đa thức đối xứng

Định nghĩa 1.4.1 ([42, Chương 1])**.** Một đa thức $f(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ là *đa thức đối xứng* nếu và chỉ nếu

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}) = f(x_1, \ldots, x_r),$$

với mọi hoán vị σ của tập chỉ số $\{1, \ldots, r\}$.

Định nghĩa 1.4.2 ([42, Chương 1])**.** Một đa thức $f(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ là *đa thức phản đối xứng* nếu và chỉ nếu

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_r),$$

với mọi hoán vị σ của tập chỉ số $\{1, \ldots, r\}$.

Định nghĩa 1.4.3 ([42, Chương 1])**.** Một đa thức $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ trên vành $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ là *đối xứng kép* nếu và chỉ nếu

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\theta(1)}, \ldots, y_{\theta(m)}),$$

với mọi hoán vị σ của tập chỉ số $\{1, \ldots, n\}$ và với mọi hoán vị θ của tập chỉ số $\{1, \ldots, m\}$.

Định nghĩa 1.4.4 ([42, Chương 1])**.** *Đa thức đối xứng sơ cấp thứ k* theo các biến $x_1, \ldots, x_r$, ký hiệu bởi $e_k(x_1, \ldots, x_r)$, được định nghĩa bởi

$$e_k(x_1, \ldots, x_r) := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le r} x_{i_1} \ldots x_{i_k}, \text{ với mọi } 1 \le k \le r.$$

Quy ước, $e_0(x_1, \ldots, x_r) = 1, e_k(x_1, \ldots, x_r) = 0$ với $k < 0$ hoặc $k > n$.

Ví dụ 1.4.1.

i. Với $r = 1$, ta có $e_1(x_1) = x_1$.

ii. Với $r = 2$, ta có $e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, e_2(x_1, x_2) = x_1x_2$.

iii. Với $r = 3$, ta có

$$
\begin{aligned}
&e_1(x_1; x_2; x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\\
&e_2(x_1; x_2; x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\
&e_3(x_1; x_2; x_3) = x_1x_2x_3.
\end{aligned}
$$

Định nghĩa 1.4.5 ([42, Chương 1])**.** *Đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ thứ k* theo các biến $x_1, \ldots, x_r$, ký hiệu là $h_k(x_1, \ldots, x_r)$, được định nghĩa bởi

$$h_k(x_1, \ldots, x_r) := \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le r} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}, \text{ với mọi } 1 \le k \le r.$$

Ví dụ 1.4.2.

i. Với $r = 1$, ta có $h_1(x_1) = x_1$.

ii. Với $r = 2$, ta có

$$
\begin{aligned}
&h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,\\
&h_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.
\end{aligned}
$$

ii. Với $r = 3$, ta có

$$
\begin{aligned}
&h_1(x_1; x_2; x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\\
&h_2(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\
&h_3(x_1; x_2; x_3) = x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2+x_1x_2x_3.
\end{aligned}
$$

Với mọi $k > 0$ và với bất kỳ r, ta có:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i e_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)h_{k-i}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0.$$

Ví dụ 1.4.3. Ta có các đồng nhất thức sau đây:

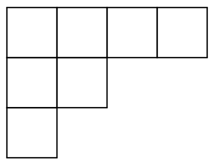
$$
\begin{aligned}
&m = 0 : e_0 = h_0 = 1,\\
&m = 1 : h_1 - e_1 = 0 \Rightarrow h_1 = e_1,\\
&m = 2 : h_2 - e_1h_1 + e_2 = 0 \Rightarrow h_2 = e_1h_1 - e_2,\\
&m = 3 : h_3 - e_1h_2 + e_2h_1 - e_3 = 0 \Rightarrow h_3 = e_1h_2 - e_2h_1 + e_3.
\end{aligned}
$$

Định nghĩa 1.4.6 ([42, Chương 1]). Một phân hoạch $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ là một bộ gồm n số nguyên thỏa mãn $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$, trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các thành phần của phân hoạch. Chiều dài của phân hoạch λ là số thành phần λ_i khác không, kí hiệu là $l(\lambda)$. Tổng $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ được gọi là trọng lượng của phân hoạch λ.

Một biểu đồ Young là một tập hợp các ô vuông xếp liền kề nhau cùng chia sẻ cột cực trái và số lượng các ô trong mỗi hàng giảm dần theo thứ tự từ trên xuống dưới. Nếu mỗi hàng theo thứ tự từ trên xuống dưới, số ô của hàng thứ i bằng với thành phần λ_i của phân hoạch $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ thì biểu đồ này gọi là biểu đồ Young của phân hoạch λ.

Bằng cách thay đổi vai trò của các dòng và các cột trong biểu đồ Young của phân hoạch λ, ta thu được một biểu đồ Young liên hợp của phân hoạch λ, ký hiệu là λ^*.

Ví dụ 1.4.4. Biểu đồ Young của phân hoạch $\lambda = (4, 2, 1)$ là



Khi đó, phân hoạch liên hợp của λ là $\lambda^* = (3, 2, 1, 1)$.

Định nghĩa 1.4.7 ([42, Chương 1]). Với mỗi phân hoạch $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, *đa thức Schur*, ký hiệu là $s_\lambda(x_1, \ldots, x_r)$, được định nghĩa bởi

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_r) := \frac{a_{\lambda+\delta_r}}{a_{\delta_r}},$$

trong đó

$$\delta_r = (r-1, \ldots, 1, 0),$$

$$a_{\lambda+\delta_r} = \det(x_i^{\lambda_j+r-j})_{r\times r} = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+r-1} & x_1^{\lambda_2+r-2} & \cdots & x_1^{\lambda_r} \\ x_2^{\lambda_1+r-1} & x_2^{\lambda_2+r-2} & \cdots & x_2^{\lambda_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^{\lambda_1+r-1} & x_r^{\lambda_2+r-2} & \cdots & x_r^{\lambda_r} \end{vmatrix},$$

$$a_{\delta_r} = \det(x_i^{r-j})_{r\times r} = \begin{vmatrix} x_1^{r-1} & x_1^{r-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{r-1} & x_2^{r-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^{r-1} & x_r^{r-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Ví dụ 1.4.5. Lấy $r = 3$ và $\lambda = (2, 1, 0)$, ta có đa thức Schur sau:

$$s_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}$$
$$= (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1).$$

Chú ý rằng, đa thức $a_{\delta_r} = \det(x_i^{r-j})_{1 \le i < j \le r}$ là định thức Vandermonde và ta có

$$a_{\delta_r} = \det(x_i^{r-j})_{1 \le i < j \le r} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} sgn(\sigma) x^{\sigma(\delta_r)} = \prod_{1 \le i < j \le r} (x_i - x_j).$$

Điều đó chỉ ra rằng, đa thức $a_{\lambda + \delta_r}$ chia hết cho a_{δ_r}. Vì thế, đa thức Schur s_λ là một đa thức đối xứng thuần nhất bậc $|\lambda|$.

Mặt khác, chúng ta cũng có

$$\prod_{j \ne i}^{r} (x_i - x_j) = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} a_{\delta_r},$$

được gọi là *bình phương của định thức Vandermonde.*

Hơn nữa, theo kết quả của [56], hệ số của đơn thức $x_1^{r-1} \cdots x_r^{r-1}$ trong

$$\prod_{j \ne i}^{r} (x_i - x_j)$$

bằng $r!$.

Cho λ là một phân hoạch và số nguyên dương k. Ta viết $\mu \in \lambda \otimes k$ nếu μ thu được bằng cách thêm k ô vào biểu đồ Young của phân hoạch λ sao cho không có hai ô cùng thêm vào một cột. Tương tự, với số nguyên dương r ta viết $\mu \in \lambda \otimes 1^r$ nếu μ thu được bằng cách thêm r ô vào biểu đồ Young của phân hoạch λ sao cho không có hai ô cùng thêm vào một dòng.

Định lý 1.4.1 ([40, Chương 1]). *(Luật Pieri). Với các ký hiệu như trên, ta có:*

$$s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu, \quad s_\lambda e_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^r} s_\mu.$$

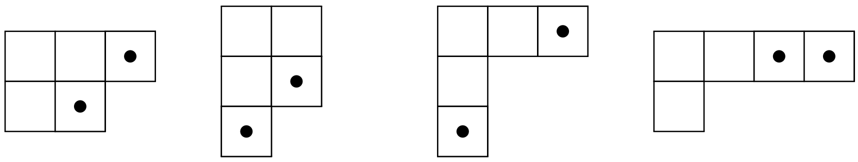
Đặc biệt, nếu $\lambda = (k)$ và $\lambda = (1^k)$ thì

$$s_{(k)}(x_1, \ldots, x_r) = h_k(x_1, \ldots, x_r), \quad s_{(1^k)}(x_1, \ldots, x_r) = e_k(x_1, \ldots, x_r).$$

Ví dụ 1.4.6. Tính tích $s_{(2,1)}s_{(2)}$.

Theo luật Pieri, tích của hai đa thức Schur trên là tổng của tất cả các đa thức Schur s_μ với μ là phân hoạch được hình thành bằng cách thêm hai ô vào bảng Young $\lambda = (2, 1)$ sao cho không có hai ô cùng thêm vào một cột.

Có tất cả bốn trường hợp như mô tả dưới đây với các đánh dấu $\bullet$ là các ô thêm vào bảng Young λ:



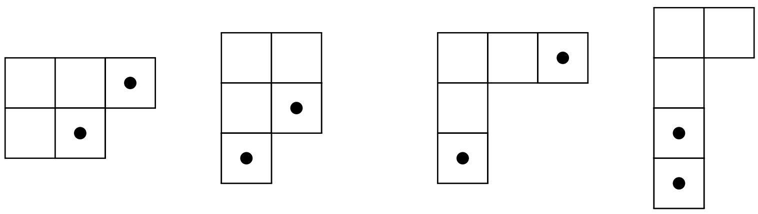
Khi đó

$$s_{(2,1)}s_{(2)} = s_{(3,2)} + s_{(2,2,1)} + s_{(3,1,1)} + s_{(4,1)}.$$

Ví dụ 1.4.7. Tính tích $s_{(2,1)}s_{(1^2)}$.

Theo luật Pieri, tích của hai đa thức Schur trên là tổng của tất cả các đa thức Schur s_μ với μ là phân hoạch được hình thành bằng cách thêm hai ô vào bảng Young $\lambda = (2, 1)$ sao cho không có hai ô cùng thêm vào một hàng.

Có tất cả bốn trường hợp như mô tả dưới đây với các ô đánh dấu $\bullet$ là các ô thêm vào bảng Young λ



Khi đó

$$s_{(2,1)}s_{(1^2)} = s_{(3,2)} + s_{(2,2,1)} + s_{(3,1,1)} + s_{(2,1,1,1)}.$$

Như vậy, một đa thức đối xứng cơ bản hoặc một đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ có thể được viết như là một đa thức Schur. Ngược lại, một đa thức Schur bất kì có thể biểu diễn được dưới dạng định thức của một ma trận mà các số hạng của nó là các đa thức đối xứng cơ bản hoặc các đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ, điều này thể hiện qua định lý sau.

Định lý 1.4.2 ([40, Chương 1])**.** *(Công thức Jacobi - Trudi). Nếu* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

là một phân hoạch thì

$$s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right)_{1\le i,j\le l(\lambda)} = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{vmatrix},$$

$$s_\lambda = \det\left(e_{\lambda_j^*-j+i}\right)_{1\le i,j\le l} \begin{vmatrix} e_{\lambda_1^*} & e_{\lambda_1^*+1} & \cdots & e_{\lambda_1^*+l-1} \\ e_{\lambda_2^*-1} & e_{\lambda_2^*} & \cdots & e_{\lambda_2^*+l-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{\lambda_l^*-l+1} & e_{\lambda_l^*-l+2} & \cdots & e_{\lambda_l^*} \end{vmatrix} \text{ với } l = l(\lambda^*)$$

.

Ví dụ 1.4.8. Giả sử $n = 2$, phân hoạch $\lambda = (3,2)$, khi đó $\lambda^* = (2,2,1)$. Theo định nghĩa đa thức Schur, ta có

$$s_{(3,2)}(x_1,x_2) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 \\ x_2^4 & x_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3.$$

Mặt khác, ta cũng có

$e_1 = h_1 = x_1 + x_2, e_2 = x_1x_2,$

$e_1e_2^2 = x_1^2x_2^2(x_1+x_2) = x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3,$

$h_2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2,$

$h_3 = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3,$

$h_4 = x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4,$

$h_3h_2 = x_1^5 + 2x_1^4x^2 + 3x_1^3x_2^2 + 3x_1^2x_2^3 + 2x_1x_2^4 + x_2^5,$

$h_1h_4 = x_1^5 + 2x_1^4x_2 + 2x_1^3x_2^2 + 2x_1^3x_2^2 + 2x_1^2x_2^3 + 2x^1x_2^4 + x_2^5,$

$h_3h_2 - h_1h_4 = x_1^3x_2^3 + x_1^2x_3$

Theo công thức Jacobi - Trudi, ta có:

$$s_{(3,2)} = \begin{vmatrix} h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_2 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 \\ 0 & 1 & e_1 \end{vmatrix}$$

1.5 Lý thuyết giao đẳng biến

Cho G là một nhóm đại số tuyến tính chiều g và X là một đa tạp chiều n trên trường $\mathbb{C}$ được trang bị một tác động $G \times X \to X$. Với mọi $i > 0$, chúng ta có thể chọn một đại diện V của G có chiều l cùng với một phủ mở trù mật $U \subset V$ với đối chiều của V/U trên V lớn hơn $n - i$ mà trên đó G tác động tự do sao cho phân thớ thương $U \to U/G$ tồn tại (xem [17, Bổ đề 9]). Khi đó, tác động chéo trên $X \times G$ cũng tự do, với một số giả thiết nhẹ theo ([17, Mệnh đề 23], phân thớ thương $X \times U \to X \times U/G$ tồn tại. Trong các phần dưới đây, ta luôn giả sử $X \times U \to X \times U/G$ tồn tại và kí hiệu là X_G.

Định nghĩa 1.5.1 ([18, Định nghĩa 1])**.** Với các ký hiệu như trên, *nhóm Chow G - đẳng biến thứ i* của X được định nghĩa bởi

$$A_i^G(X) := A_{i+l-g}(X_G),$$

trong đó A_* là nhóm Chow được định nghĩa trong Mục (1.2.4).

Theo [17, Mệnh đề 1], định nghĩa $A_i^G(X)$ xác định như trên là một định nghĩa tốt. *Nhóm Chow G - đẳng biến của X* được định nghĩa là

$$A_*^G(X) := \bigoplus_i A_i^G(X).$$

Nếu X_G là đa tạp trơn thì $A_*^G(X)$ được thừa hưởng tích giao từ nhóm Chow nguyên thủy. Khi đó, $A_*^G(X)$ có cấu trúc của vành phân bậc và được gọi là *vành Chow $G-$ đẳng biến*. Chẳng hạn, nếu $G = T = (\mathbb{C}^*)^g$ là một tác động xuyến n chiều thì vành Chow $T-$ đẳng biến của một điểm đẳng cấu với một một vành đa thức n biến ([17]). Trong phần dưới đây, chúng ta ký hiệu vành này là $\mathcal{R}_T$.

Một *phân thớ vectơ G - đẳng biến* là một phân thớ vectơ E trên X cùng với phép nâng của tác động G trên X đến một tác động G trên E sao cho phép nâng này tuyến tính trên các thớ. Theo [17, Bổ đề 1], E_G là một phân thớ vectơ trên X_G. Lớp Chern G - đẳng biến $c_i^G(E)$ được định nghĩa là lớp Chern $c_i(E_G)$. Nếu E có hạng là r thì lớp Chern cao nhất $c_r^G(E)$ được gọi là lớp Euler G - đẳng biến của E và được ký hiệu bởi $e^G(E)$.

Chú ý rằng, phân thớ vectơ G - đẳng biến trên một điểm là một đại diện của G (xem [17, Mục 3.2]). Khi $G = T = (\mathbb{C}^*)^n$ là môt tác động xuyến n - chiều và $X = pt$ là một điểm, đặt $M(T)$ là nhóm đặc trưng của tác động T. Giả sử rằng

$\mathcal{R}_T = C[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Khi đó, có một đồng cấu nhóm $\phi : M(T) \to \mathcal{R}_T$ được xác định bởi $\rho_i \mapsto \lambda_i$ trong đó ρ_i là đặc trưng của T được xác định bởi $\rho_i(t_1, \ldots, t_n) = t_i$. Điều này cảm sinh một đẳng cấu vành $\mathrm{Sym}(M(T)) \cong \mathcal{R}_T$. Chúng ta gọi $\phi(\rho)$ là trọng lượng của ρ. Đặc biệt, λ_i là trọng lượng của ρ_i.

Ví dụ 1.5.1. Xét tác động của xuyến $T = (\mathbb{C}^*)^4$ lên $\mathbb{C}^4$ được cho bởi công thức theo các tọa độ

$$(a_1, \ldots, a_4).(x_1, \ldots, x_4) = (a_1x_1, \ldots, a_4x_4).$$

Điều này cảm sinh một tác động lên đa tạp Grassmann $G(2, 4)$ với các điểm cố định cô lập L_I tương ứng với các phẳng tọa độ 2 chiều trong $\mathbb{C}^4$. Mỗi điểm L_I được đánh số bởi một tập con 2 phân tử I của tập $\{1, \ldots, 4\}$ để L_I được xác định bởi các phương trình $x_j = 0$ với $j \notin I$. Lấy $\mathcal{S}$ là phân thớ con phổ dụng của đa tạp Grassmann $G(2, 4)$. Tại mỗi điểm L_I, ánh xạ thu hẹp của tác động T lên thớ $\mathcal{S}|_{L_I}$ sinh ra một đại diện của T có đặc trưng ρ_i với $i \in I$. Đại diện này tạo ra một phân thớ vectơ T - đẳng biến hạng 2 trên một điểm. Chúng ta cũng ký hiệu nó là $\mathcal{S}|_{L_I}$. Nếu $I = \{i_1, i_2\}$ thì chúng ta $c_1^T(\mathcal{S}|_{L_I}) = \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}$ và $c_2^T(\mathcal{S}|_{L_I}) = \lambda_{i_1} \cdot \lambda_{i_2}$ trong đó λ_{i_1} và λ_{i_2} lần lượt là trọng số của ρ_{i_1} và ρ_{i_2}.

Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn được trang bị tác động $T = (\mathbb{C}^*)^g$. Chúng ta ký hiệu X^T là tập hợp các điểm cố định của tác động T. Một kết quả quan trọng của lý thuyết giao đẳng biến là định lý địa phương hóa.

Định lý 1.5.1 ([6, Atiyah-Bott]). *Cho X^T là tập hợp các điểm cố định của tác động T. Ánh xạ nhúng $i : X^T \hookrightarrow X$ cảm sinh một đẳng cấu*

$$i^* : A_*^T(X) \otimes_{\mathbb{C}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]} \mathcal{R}_T \simeq A_*^T(X^T) \otimes_{\mathbb{C}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]} \mathcal{R}_T,$$

trong đó $\mathcal{R}_T \cong \mathbb{C}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ là trường thương của $\mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$.

Hơn nữa, Atiyah-Bott [6] và Berline-Vergne [8] đã đưa ra một công thức tường minh cho đẳng cấu ngược với giả thiết rằng X là một đa tạp xạ ảnh và X^T là hữu hạn. Cụ thể hơn, chúng ta có công thức sau đây.

Định lý 1.5.2 (Atiyah-Bott [6], Berline-Vergne [8]). *Giả sử rằng X là một đa tạp xạ ảnh được trang bị một tác động xuyến với hữu hạn điểm cố định. Với mỗi $\alpha \in A_*^T(X)$, ta có*

$$\int_X \alpha = \sum_{p \in X^T} \frac{\alpha|_p}{e_p}, \tag{1.1}$$

trong đó e_p *là lớp Euler đẳng biến của phân thớ tiếp xúc tại điểm cố định* p *và* $\alpha|_p$ *là sự hạn chế của* α *tới điểm* p.

Chú ý rằng, công thức Atiyah-Bott-Berline-Vergne (1.1) chỉ ra rằng chúng ta có thể tính bậc của chu trình không chiều trên đa tạp Grassmann trơn theo các dữ liệu từ các điểm cố định của tác động xuyến.

Chương 2

Bậc của đa tạp Fano

Bằng ngôn ngữ của lý thuyết giao, Fulton [22] đã chỉ ra rằng bậc của đa tạp Fano có thể biểu diễn như là một số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann. Trên cơ sở đó, các công thức tường minh về bậc của đa tạp Fano cũng được đưa ra bởi Debarre - Manivel [16] và Hiep [31]. Gần đây, trong [33], Hiep đã đề xuất một kỹ thuật mới để xử lý số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann, kết quả này cung cấp công cụ để thiết lập các công thức liên quan đến những bất biến của đa tạp đại số. Trong luận án, chúng tôi tiếp cận hướng nghiên cứu này đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ trong không gian xạ ảnh phức dưới dạng hệ số của một đơn thức đặc biệt trong sự phân tích của một đa thức đối xứng. Hơn nữa, trong trường hợp chiều của đa tạp Fano bằng một, chúng tôi sẽ chỉ ra một công thức liên hệ giữa giữa giống và bậc. Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết qủa chính trong hai bài báo [34] và [36].

2.1 Đa tạp Fano

Định nghĩa 2.1.1 ([27, Ví dụ 6.19])**.** Cho X là một đa tạp xạ ảnh trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ và k là một số nguyên dương sao cho $1 \leq k \leq n$. *Đa tạp Fano* $F_k(X)$ là tập hợp gồm tất cả không gian con tuyến tính k chiều chứa trong X, nghĩa là

$$F_k(X) = \{W \subset X | \dim W = k\} \subset G(n+1, k+1).$$

Đa tạp Fano $F_k(X)$ là đa tạp con trơn của đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$.

Cấu trúc đa tạp xạ ảnh của đa tạp Fano $F_k(X)$ được thừa hưởng từ cấu trúc đa tạp xạ ảnh của đa tạp Grassmann. Thông qua phép nhúng Plücker, chúng ta cũng nhận được định nghĩa bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$.

Trong chương này, chúng tôi tìm hiểu các kết quả gần đây liên quan đến bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ trong trường hợp X là một siêu mặt xạ ảnh tổng quát bậc d, tức là tập nghiệm của một đa thức thuần nhất bậc d. Trên cơ sở đó, chúng tôi nghiên cứu và đưa ra một công thức tính bậc cho đa tạp Fano $F_k(X)$ trong trường hợp X là một *giao đầy đủ xạ ảnh tổng quát* loại $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$, tức là giao của r siêu mặt bậc d_i, $i = 1, \ldots, r$ với r là đối chiều của X trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. Chú ý rằng ở đây chúng ta giả sử rằng X phải là *tổng quát*, tức là X phải thuộc một tập mở trù mật nào đó. Nói một cách đơn giản, điều kiện tổng quát có nghĩa là hầu hết các trường hợp xảy ra chúng ta sẽ thu được cùng một kết quả như mong đợi.

2.2 Nguyên lý chẻ

Định lý 2.2.1 ([20, Mục 5.4]). *(Nguyên lý chẻ). Cho E là một phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh X. Khi đó, tồn tại một đa tạp xạ ảnh Y và một đồng cấu phẳng $f : Y \to X$ sao cho*

i. Đồng cấu kéo về $f^* : A(X) \to A(Y)$ là đơn ánh;

ii. $f^*(E) \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$, với L_i là phân thớ đường thẳng trên Y.

Áp dụng Mệnh đề 1.2.3 và Định lý 2.2.1, ta có

$$c(E) = \prod_{i=1}^{r}(1 + c_1(L_i)).$$

Đặt $\alpha_i = c_1(L_i) \in A^1(X)$, ta có

$$c(E) = \prod_{i=1}^{r}(1 + \alpha_i),$$

trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ được gọi là các *nghiệm Chern* của E.

Nói cách khác, ta thể xem các lớp Chern của phân thớ vectơ E như các đa thức đối xứng cơ bản theo r biến $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Hơn nữa, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
&c_0(E) = 1,\\
&c_1(E) = \sum_{1\le i\le r} \alpha_i,\\
&c_2(E) = \sum_{1\le i<j\le r} \alpha_i\alpha_j,\\
&\dots,\\
&c_r(E) = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r.
\end{aligned}$$

Các Mệnh đề sau đây sẽ hữu ích khi chúng ta làm những tính toán trên các lớp Chern của một phân thớ vectơ.

Mệnh đề 2.2.1 ([22, Chú ý 3.2.3 và Ví dụ 3.2.6])**.** *Cho E và F là hai phân thớ vectơ với các nghiệm Chern $(\alpha_i)_i$ và $(\beta_j)_j$. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

i. E^* *có các nghiệm Chern là* $(-\alpha_i)_i$.

ii. $E\otimes F$ *có các nghiệm Chern là*

$$(\alpha_i+\beta_j)_{i,j}.$$

iii. $\mathrm{Sym}^d E$ *có các nghiệm Chern là*

$$(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_d})_{i_1\le\cdots\le i_d}.$$

iv. $\wedge^d E$ *có các nghiệm Chern là*

$$(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_d})_{i_1<\cdots<i_d}.$$

Ví dụ 2.2.1. Cho E là phân thớ vectơ hạng 2 trên đa tạp xạ ảnh X với chiều 4. Khi đó lớp Chern của $\mathrm{Sym}^3 E$ được tính thông qua các lớp Chern của E như sau: Giả sử α_1,α_2 là các nghiệm Chern của E. Khi đó $\mathrm{Sym}^3 E$ có các nghiệm Chern là

$$3\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, 3\alpha_2.$$

Vì vậy, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
c_1(\mathrm{Sym}^3 E) &= 3\alpha_1+2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_2\\
&= 6(\alpha_1+\alpha_2)\\
&= 6c_1(E).
\end{aligned}$$

Tương tự, chúng ta có:

$$\begin{aligned} c_2(\operatorname{Sym}^3 E) &= 11c_1(E)^2 + 10c_2(E), \\ c_3(\operatorname{Sym}^3 E) &= 6c_1(E)^3 + 30c_1(E)c_2(E), \\ c_4(\operatorname{Sym}^3 E) &= 18c_1(E)^2c_2(E) + 9c_2(E)^2. \end{aligned}$$

Mệnh đề 2.2.2 ([22, Ví dụ 3.2.2])**.** *Nếu E là phân thớ vectơ hạng r và L là phân thớ đường thẳng thì*

$$c_k(E \otimes L) = \sum_{i=0}^{k} \binom{r-i}{k-i} c_1(L)^{k-i} c_i(E).$$

Mệnh đề 2.2.3 ([20, Mệnh đề 5.25])**.** *Lớp Chern thứ nhất của phân thớ tiếp xúc T_G của đa tạp Grassmann $G = G(k, V)$ là*

$$c_1(T_G) = (n+1)\sigma_1,$$

trong đó $\sigma_1 = c_1(\mathcal{S}^*) = c_1(\mathcal{Q})$ với S^* là phân thớ đối ngẫu của phân thớ con phổ dụng $\mathcal{S}$ và $\mathcal{Q}$ là phân thớ thương phổ dụng của đa tạp Grassmann $G(k, n)$.

Mệnh đề 2.2.4 ([20, Mục 7.3.5])**.** *Các lớp Chern của phân thớ con phổ dụng $\mathcal{S}$ và phân thớ thương phổ dụng $\mathcal{Q}$ của đa tạp Grassmann $G(k, n)$ được xác định như sau*

$$c_i(\mathcal{S}) = (-1)^i \sigma_{1^i}, \forall i = 1, \ldots, k$$

$$c_i(\mathcal{Q}) = \sigma_i, \forall i = 1, \ldots, n-k,$$

trong đó σ_i và σ_{1^i} là lớp chu trình đặc biệt của vành Chow $A(G)$.

Ví dụ 2.2.2. Trên đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$, xét phân thớ đối ngẫu $\mathcal{S}^*$ của phân thớ con $\mathcal{S}$ hạng $k+1$. Lấy $W \in G(k+1, n+1)$, khi đó nhát cắt của $\mathcal{S}^*$ tại W là $H^0(W, \mathcal{O}_W(1))$. Do đó, ta có:

$$\mathcal{S}^* = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_k, \text{ với } L_i \text{ là các phân thớ đường thẳng.}$$

Lớp Chern toàn phần của $\mathcal{S}^*$ được biểu diễn dưới dạng

$$c(\mathcal{S}^*) = 1 + c_1(\mathcal{S}^*) + \cdots + c_{k+1}(\mathcal{S}^*).$$

Theo Nguyên lý chẻ (2.2.1), ta có:

$$c(\mathcal{S}^*) = (1+\alpha_0)\cdots(1+\alpha_k),$$

với $\alpha_i = c_1(L_i)$ là các nghiệm Chern.

Xét phân thớ $\mathrm{Sym}^d(\mathcal{S}^*)$ trên $G(k+1, n+1)$ với hạng

$$\binom{d+k}{k} > (k+1)(n-k).$$

Để tính lớp Chern của $\mathrm{Sym}^d(\mathcal{S}^*)$ ta viết

$$\mathrm{Sym}^d(\mathcal{S}^*) = \bigoplus_{a_0+\cdots+a_k=d, a_i\in\mathbb{N}} L_0^{a_0}\cdots L_k^{a_k}$$

Mà $c_1(L_0^{a_0}\cdots L_k^{a_k}) = a_0\alpha_0 + \ldots + a_k\alpha_k$ nên ta thu được kết quả

$$c(\mathrm{Sym}^d(\mathcal{S}^*)) = \prod_{a_0+\cdots+a_k=d, a_i\in\mathbb{N}} (1 + a_0\alpha_0 + \cdots + a_k\alpha_k).$$

2.3 Đặc trưng số giao trên đa tạp Grassmann

Bằng cách sử dụng của công thức nội suy Lagrange phiên bản cho các đa thức nhiều biến và bậc bị chặn, Hiep [33] đã chứng minh các đồng nhất thức liên quan đến các đa thức đối xứng. Như một hệ quả, một phương pháp khác để xử lý các số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann được đưa ra. Trong luận án, chúng tôi sử dụng kết quả này nghiên cứu công thức tính bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ trong trường hợp X là một giao đầy đủ.

Đầu tiên, chúng tôi trình bày một đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng được đưa ra bởi Hiep [33]. Kết quả này được Hiep chứng minh bằng cách sử dụng định lý chia đa thức nhiều biến. Trong luận án, chúng tôi sẽ cung cấp thêm một cách chứng minh hoàn toàn khác bằng cách dùng những lập luận giải tích, chứng minh này được trình bày cụ thể trong Chương 4 của luận án. Ở đây, chúng tôi sẽ trình bày lại cách chứng minh của Hiep để so sánh với lập luận mà chúng tôi đưa ra.

Để thuận tiện, ta sẽ sử dụng ký hiệu $[n]$ thay cho tập $\{1, \ldots, n\}$. Với mỗi tập con $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [n]$ thì đặt $\lambda_I = (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k})$ và $I^c = [n]\backslash I$.

Định lý 2.3.1 ([33, Định lý 1])**.** *Cho $P(x_1, \ldots, x_k)$ là một đa thức đối xứng có bậc không lớn hơn $k(n-k)$, trong đó k, n là các số nguyên sao cho $0 < k < n$. Khi đó, ta có đồng nhất thức*

$$\sum_{I\subset[n]} \frac{P(\lambda_I)}{\prod\limits_{i\in I, j\in I^c}(\lambda_i - \lambda_j)} = \frac{c(k,n)}{k!}, \tag{2.1}$$

trong đó $c(k,n)$ *là hệ số của đơn thức* $x_1^{n-1}\cdots x_k^{n-1}$ *trong khai triển của đa thức đối xứng*

$$P(x_1,\ldots,x_k)\prod_{i\neq j}(x_i-x_j).$$

Chứng minh. Đặt

$$F(x_1,\ldots,x_k)=P(x_1,\ldots,x_k)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j).$$

Theo giả thiết, bậc của đa thức $F(x_1,\ldots,x_k)$ không lớn hơn

$$k(n-k)+k(k-1)=k(n-1).$$

Vì đa thức $P(x_1,\ldots,x_k)$ là đa thức đối xứng nên đa thức $F(x_1,\ldots,x_k)$ cũng là đa thức đối xứng. Theo định lý chia đa thức nhiều biến (xem [12, Định lý 3]), tồn tại các đa thức $F_i(x_1,\ldots,x_k)$, với mọi $i=1,\ldots,k$ và đa thức $R(x_1,\ldots,x_k)$ sao cho

$$R(x_1,\ldots,x_k)=F(x_1,\ldots,x_k)-\sum_{i=1}^{k}F_i(x_1,\ldots,x_k)\prod_{j=1}^{n}(x_i-\lambda_j)$$

trong đó tất cả các bậc riêng theo từng biến của đa thức $R(x_1,\ldots,x_k)$ không lớn hơn $n-1$. Theo công thức nội suy Lagrange, ta có:

$$R(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{i_1=1}^{n}R(\lambda_{i_1},x_2,\ldots,x_k)L_{i_1}(x_1).$$

Dùng công thức nội suy Lagrange cho các đa thức $R(\lambda_{i_1},x_2,\ldots,x_k)$, ta có

$$R(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2}^{n}R(\lambda_{i_1},\lambda_2,\ldots,x_k)L_{i_1}(x_1)L_{i_2}(x_2).$$

Tương tự, lập lại quá trình trên k lần, ta thu được

$$R(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}R(\lambda_I)\prod_{l=1}^{k}L_{i_l}(x_l).$$

Với mỗi tập $I=\{i_1,\ldots,i_k\}$, ta có $R(\lambda_I)=F(\lambda_I)$. Nếu $i_s=i_t$ với mọi $s\neq t$ thì $R(\lambda_I)=0$. Vì bậc của đa thức $F(x_1,\ldots,x_k)$ không quá $k(n-1)$ nên hệ số của $x_1^{n-1}\cdots x_k^{n-1}$ trong đa thức $R(x_1,\ldots,x_k)$ cũng bằng với hệ số của $x_1^{n-1}\cdots x_k^{n-1}$ trong đa thức $F(x_1,\ldots,x_k)$. Điều này suy ra hệ số của $x_1^{n-1}\cdots x_k^{n-1}$ trong $F(x_1,\ldots,x_k)$ là

$$k!\sum_{I\subset[n]}\frac{F(\lambda_I)}{\prod\limits_{i\in I,j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

Với mỗi $I \subset [n]$, ta có

$$F(\lambda_I) = P(\lambda_I) \prod_{i,j \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j),$$

và

$$\prod_{i \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{i \in I, j \in I^c} (\lambda_i - \lambda_j) \prod_{i,j \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Điều này chỉ ra rằng hệ số của $x_1^{n-1} \cdots x_k^{n-1}$ trong $F(x_1, \ldots, x_k)$ bằng với

$$k! \sum_{I \subset [n]} \frac{P(\lambda_I)}{\prod_{i \in I, j \in I^c} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Kỹ thuật địa phương hóa trong lý thuyết giao đẳng biến cho phép chúng ta biểu diễn số giao dưới dạng một số dữ liệu được gắn vào các điểm cố định của một tác động xuyến. Trong trường hợp đặc biệt, đối với đa tạp Grassmann, chúng ta thu được các công thức thú vị với quan hệ tầm thường liên quan đến các hàm hữu tỉ. Trong [33], Hiep đã đề xuất một phương pháp mới để xử lý các số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann bằng cách sử dụng công thức Atiyah-Bott-Berline-Vergne và kết quả của Định lý 2.3.1. Tiếp theo, chúng tôi trình bày lại kết quả này và chứng minh chi tiết, vì đây là cơ sở quan trọng được sử dụng trong lập luận chứng minh kết quả của chúng tôi.

Xét các số giao (bậc của lớp chu trình) sau đây:

$$\int_{G(k,n)} \Phi(\mathcal{S}) \quad , \quad \int_{G(k,n)} \Psi(\mathcal{Q}),$$

trong đó $\Phi(\mathcal{S}), \Psi(\mathcal{Q})$ tương ứng là các lớp đặc trưng của các phân thớ con phổ dụng $\mathcal{S}$ và phân thớ thương phổ dụng $\mathcal{Q}$ trên đa tạp Grassmann $G(k, n)$.

Định lý 2.3.2 ([33, Hệ quả 1]). *Giả sử rằng $\Phi(\mathcal{S})$ được đại diện bởi một đa thức đối xứng $P(x_1, \ldots, x_k)$ với bậc không lớn hơn $k(n-k)$, trong đó các biến $x_1, \ldots, x_k$ là các nghiệm Chern của $\mathcal{S}$ và $\Psi(\mathcal{Q})$ được đại diện bởi một đa thức đối xứng $Q(y_1, \ldots, y_{n-k})$ với bậc không lớn hơn $k(n-k)$, trong đó các biến $y_1, \ldots, y_{n-k}$ là các nghiệm Chern của $\mathcal{Q}$. Khi đó chúng ta có các khẳng định sau đây:*

i.

$$\int_{G(k,n)} \Phi(\mathcal{S}) = (-1)^{k(n-k)} \frac{c(k, n)}{k!},$$

trong đó $c(k,n)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}\dots x_k^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$P(x_1,\dots,x_k)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j).$$

ii.

$$\int_{G(k,n)}\Psi(\mathcal{Q})=\frac{c(k,n)}{(n-k)!},$$

trong đó $c(k,n)$ là hệ số của đơn thức $y_1^{n-1}\dots y_{n-k}^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$Q(y_1,\dots,y_{n-k})\prod_{j\neq i}(y_i-y_j).$$

Chứng minh. Xét tác động của xuyến $T=(\mathbb{C}^*)^n$ lên $\mathbb{C}^n$ được cho bởi công thức theo các tọa độ

$$(a_1,\dots,a_n)\cdot(x_1,\dots,x_n)=(a_1x_1,\dots,a_nx_n).$$

Điều này cảm sinh một tác động xuyến lên đa tạp Grassmann $G(k,n)$ với các điểm cố định cô lập p_I tương ứng với các phẳng tọa độ k chiều trong $\mathbb{C}^n$. Mỗi điểm p_I được đánh số bởi một tập con k phần tử $I\subset\{1,\dots,n\}$.

Theo công thức Atiyah-Bott-Berline-Vergne, ta có

$$\int_{G(k,n)}\Phi(\mathcal{S})=\sum_{p_I}\frac{\Phi^T(\mathcal{S}|_{p_I})}{e_{p_I}}$$

và

$$\int_{G(k,n)}\Psi(\mathcal{Q})=\sum_{p_I}\frac{\Psi^T(\mathcal{Q}|_{p_I})}{e_{p_I}}.$$

Với mỗi p_I, các tác động xuyến lên các thớ $\mathcal{S}|_{p_I}$ và $\mathcal{Q}|_{p_I}$ có các đặc trưng ρ_i với $i\in I$ và ρ_j với $j\in I^c$ tương ứng. Kết hợp với giả thiết, các điều này chỉ ra rằng các lớp đặc trưng T - đẳng biến tại p_I là

$$\Phi^T(\mathcal{S}|_{p_I})=P(\lambda_I)$$

và

$$\Psi^T(\mathcal{Q}|_{p_I})=Q(\lambda_{I^c}).$$

Vì phân thớ tiếp xúc tại p_I đẳng cấu với $\mathcal{S}^*\otimes\mathcal{Q}$ nên các đặc trưng của tác động xuyến lên phân thớ tiếp xúc tại p_I là

$$\{\rho_i-\rho_j\mid i\in I,j\in I^c\}.$$

Do đó lớp T - Euler đẳng biến của phân thớ tiếp xúc tại p_I là

$$e_{p_I} = \prod_{i\in I, j\in I^c} (\lambda_j - \lambda_i) = (-1)^{k(n-k)} \prod_{i\in I, j\in I^c} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Do đó, ta nhận được

$$\int_{G(k,n)} \Phi(\mathcal{S}) = (-1)^{k(n-k)} \sum_{I\subset[n], |I|=k} \frac{P(\lambda_I)}{\prod\limits_{i\in I, j\in I^c} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

và

$$\int_{G(k,n)} \Psi(\mathcal{Q}) = \sum_{I\subset[n], |I|=k} \frac{Q(\lambda_{I^c})}{\prod\limits_{i\in I, j\in I^c} (\lambda_j - \lambda_i)} = \sum_{I\subset[n], |I|=n-k} \frac{Q(\lambda_I)}{\prod\limits_{i\in I, j\in I^c} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Kết hợp với Định lý 2.3.1, khẳng định của Định lý 2.3.2 được chứng minh như mong đợi. □

2.4 Bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một siêu mặt xạ ảnh

Trong phần này, chúng ta sẽ liệt kê lại những kết quả đã biết về bậc của đa tap Fano của các không gian con tuyến tính trên một siêu mặt xạ ảnh. Cho X là một siêu mặt tổng quát bậc d trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ và k là một số nguyên dương sao cho $1 \leq k \leq n$. Để thuận tiện, ta đặt

$$\delta(n,k,d) = (k+1)(n-k) - \binom{d+k}{k}.$$

Trong bài báo [38], Langer đã đưa ra kết quả về chiều của đa tạp Fano $F_k(X)$ như sau:

Định lý 2.4.1 ([38, Định lý 0.1]). *Cho $X \subset \mathbb{P}^n$ là một siêu mặt đủ tổng quát bậc d. Giả sử rằng $d \neq 2$ (hoặc $n \geq 2k+1$). Khi đó*

i. Nếu $\delta(n,k,d) < 0$ thì đa tạp Fano $F_k(X) = \emptyset$,

ii. Nếu $\delta(n,k,d) \geq 0$ thì đa tạp Fano $F_k(X)$ là đa tạp con trơn của đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$ có chiều bằng $\delta(n,k,d)$.

Lớp chu trình của đa tạp Fano $[F_k(X)]$ trong vành Chow $A^*(G(k+1; n+1))$ được mô tả bởi định lý sau:

Định lý 2.4.2 ([20, Mệnh đề 6.4]). *Cho $\mathcal{S}$ là phân thớ con phổ dụng trên đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$ và $\operatorname{Sym}^d \mathcal{S}^*$ là luỹ thừa đối xứng thứ d của phân thớ đối ngẫu $\mathcal{S}^*$. Khi đó*

$$[F_k(X)] = c_{top}(\operatorname{Sym}^d \mathcal{S}^*) \in A^*(G(k+1; n+1)),$$

trong đó $c_{\mathrm{top}}(E)$ là lớp Chern cao nhất của phân thớ vectơ E.

Theo ngôn ngữ của lý thuyết giao, bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ được biểu diễn như là một số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann.

$$\deg(F_k(X)) = \int_{G(k+1,n+1)} c_{\binom{d+k}{d}}(\operatorname{Sym}^d \mathcal{S}^*) \cdot c_1(\mathcal{Q})^{\delta(n,k,d)}, \tag{2.2}$$

trong đó $\mathcal{S}$ và $\mathcal{Q}$ là các phân thớ con phổ dụng và phân thớ thương phổ dụng trên đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$, $\operatorname{Sym}^d \mathcal{S}^*$ là luỹ thừa đối xứng thứ d của phân thớ đối ngẫu $\mathcal{S}^*$ và $c_i(E)$ là lớp Chern thứ i của phân thớ vectơ E.

Áp dụng công thức Atiyah - Bott - Berline - Vergne của lý thuyết giao đẳng biến, Hiep [31] đã chứng minh bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ được biểu diễn dưới dạng tổng của các hàm phân thức đối xứng như sau:

Gọi $\mathcal{I}$ là tập hợp gồm tất cả các tập con I có $k+1$ phần tử của tập hợp $\{1, \ldots, n+1\}$. Trên vành đa thức $\mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n+1}]$ với $n+1$ biến $h_1, \ldots, h_{n+1}$, với mỗi tập $I \in \mathcal{I}$, ta đặt

$$S_I = \prod_{v_i \in \mathbb{N}, \sum_{i\in I} v_i = d} \left(\sum_{i\in I} v_i h_i \right), \quad Q_I = \sum_{j \notin I} h_j$$

và

$$T_I = \prod_{i\in I} \prod_{j\notin I} (h_i - h_j).$$

Khi đó S_I, Q_I và T_I là các đa thức của vành $\mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n+1}]$.

Định lý 2.4.3 ([31, Định lý 1.1]). *Lấy $k, n, d \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $d \neq 2$ (hoặc $n \geq 2k+1$) và $\delta(n, d, k) \geq 0$ và $X \subset \mathbb{P}^n$ là siêu mặt tổng quát bậc d. Khi đó, bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ được xác định bởi*

$$\deg(F_k(X)) = (-1)^{\delta(n,k,d)} \sum_{I\in\mathcal{I}} \frac{S_I Q_I^{\delta(n,k,d)}}{T_I}, \tag{2.3}$$

trong đó tổng trên chạy trên khắp tất cả các tập I thuộc $\mathcal{I}$.

Chú ý 2.4.1. Vế phải của công thức (2.3) là một hàm phân thức hữu tỉ và định lý trên nói rằng nó thật sự là hàm hằng, hơn nữa là một số nguyên không âm.

Ví dụ 2.4.1. Cho $k = 1$ và $X \subset \mathbb{P}^3$ là một siêu mặt tổng quát bậc ba. Trong trường hợp này, đa tạp Fano $F_1(X)$ có số chiều là $\delta(n, k, d) = 0$. Bậc của $F_1(X)$ được tính toán theo công thức trên như sau:

$$\deg(F_1(X)) = \sum_{\{i_1,i_2\}\subset\{1,2,3,4\}} \frac{3h_{i_1}(2h_{i_1} + h_{i_2})(h_{i_1} + 2h_{i_2})3h_{i_2}}{(h_{i_1} - h_{j_1})(h_{i_1} - h_{j_2})(h_{i_2} - h_{j_1})(h_{i_2} - h_{j_2})},$$

trong đó $\{j_1, j_2\}$ là phần bù của tập $\{i_1, i_2\}$ trong tập $\{1, 2, 3, 4\}$. Sau khi đơn giản hoá vế phải của công thức trên, chúng ta thu được bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ là 27.

Nếu $k, n, d \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $d \neq 2$ (hoặc $n \geq 2k + 1$) và $\delta(n, k, d) = 0$ thì đa tạp Fano $F_k(X)$ có chiều bằng 0. Trong trường hợp này bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ bằng với số không gian con tuyến tính k-chiều của X.

Đặc biệt, nếu $k = 1$ và $\delta(n, k, d) = 0$ thì $d = 2n - 3$. Trong trường hợp này, ta có

$$\mathcal{I} = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i < j \leq n + 1\}.$$

Với mỗi $I = \{i, j\} \in \mathcal{I}$, ta có

$$S_I = \prod_{a=0}^{2n-3} (ah_i + (2n - 3 - a)h_j)$$

và

$$T_I = \prod_{k\neq i,j} ((h_i - h_k)(h_j - h_k).$$

Từ đó đưa đến hệ quả sau:

Hệ quả 2.4.1 ([31, Hệ quả 1.2])**.** *Với các ký hiệu đã nêu ở trên, nếu $d \neq 2$ (hoặc $n \geq 2k + 1$) và $\delta(n, k, d) = 0$. Khi đó số các không gian con tuyến tính trên X bằng*

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \frac{S_I}{T_I}.$$

Đặc biệt, số đường thẳng trên một siêu mặt tổng quát bậc $2n - 3$ trong $\mathbb{P}^n$ bằng

$$\sum_{1\leq i<j\leq n+1} \frac{\prod_{a=0}^{2n-3}(ah_i + (2n - 3 - a)h_j)}{\prod_{k\neq i,j}((h_i - h_k)(h_j - h_k)}.$$

2.5 Bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ xạ ảnh

Cho X là một giao đầy đủ tổng quát loại $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với $n \geq 4$ và $d_i \geq 2$ với mọi $i = 1, \ldots, r$. Để thuận tiện, chúng ta đặt

$$\delta(n, \underline{d}, k) = (k+1)(n-k) - \sum_{i=1}^{r} \binom{d_i + k}{k}.$$

Định lý 2.5.1 ([16, Định lý 2.1])**.** *Nếu X không là giao đầy đủ bậc hai (hoặc $n \geq 2k + r$) và $\delta(n, \underline{d}, k) \geq 0$ thì đa tạp Fano $F_k(X)$ là đa tạp con trơn của đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$ có chiều bằng $\delta(n, \underline{d}, k)$.*

Debarre - Manivel đã chỉ ra công thức tính bậc cho $F_k(X)$ như sau:

Định lý 2.5.2 ([16, Định lý 4.3])**.** *Với các ký hiệu nêu trên, nếu X không là giao đầy đủ bậc hai (hoặc $n \geq 2k + r$) và $\delta(n, \underline{d}, k) \geq 0$ thì bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ được xác định như sau:*

$$\deg(F_k(X)) = e(n, \underline{d}, k),$$

trong đó $e(n, \underline{d}, k)$ là hệ số của đơn thức $x_0^n x_1^{n-1} \cdots x_k^{n-k}$ trong khai triển của đa thức

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{a_0+\cdots+a_k=d_i, a_i \in \mathbb{N}} (a_0x_0 + \cdots + a_kx_k)(x_0 + \cdots + x_k)^{\delta(n,\underline{d},k)} \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Ví dụ 2.5.1. Chúng ta xét lại Ví dụ 2.4.1 ở trên. Từ phát biểu của Định lý 2.5.2, bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ được tính như sau:

$$\deg(F_1(X)) = e(3, (3), 1),$$

trong đó $e(3, (3), 1)$ là hệ số của $x_0^3 x_1^2$ trong khai triển đa thức.

$$3x_0(2x_0 + x_1)(x_0 + 2x_1)3x_1(x_0 - x_1).$$

Sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức cùng bậc, chúng ta thu được

$$e(3, (3), 1) = 27.$$

Do đó, bậc của đa tạp Fano$F_1(X)$ bằng 27.

Sử dụng Định lý (2.3.2), chúng tôi đã đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ trong không gian xạ ảnh.

Định lý 2.5.3. *Với các ký hiệu nêu trên, nếu X không là giao đầy đủ bậc hai (hoặc $n \geq 2k + r$) và $\delta(n, \underline{d}, k) \geq 0$ thì bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ được xác định bởi*

$$\deg(F_k(X)) = \frac{c(n, \underline{d}, k)}{(k+1)!}, \tag{2.4}$$

trong đó $c(n, \underline{d}, k)$ là hệ số của đơn thức $x_0^n \cdots x_k^n$ trong khai triển của đa thức

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{a_0+\cdots+a_k=d_i, a_i \in \mathbb{N}} (a_0x_0 + \cdots + a_kx_k)(x_0 + \cdots + x_k)^{\delta(n,\underline{d},k)} \prod_{i \neq j}(x_i - x_j).$$

Để chứng minh Định lý 2.5.3, chúng tôi cần sử dụng kết quả của Bổ đề sau:

Bổ đề 2.5.1 ([20, Mệnh đề 6.4]). *Cho X là một giao đầy đủ tổng quát loại $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. Đa tạp $F = F_k(X)$ là tập không điểm của một nhát cắt toàn cục của phân thớ vectơ*

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Sym}^{d_i} \mathcal{S}^*.$$

Chứng minh. Giả sử $X = X_1 \cap \cdots \cap X_r \subseteq \mathbb{P}^n$ là giao của của r siêu mặt $X_1, \ldots, X_r$ với $\deg(X_i) = d_i$ với mọi $i = 1, \ldots, r$. Khi đó, mỗi $F_k(X_i)$ là tập không điểm của nhát cắt toàn cục s_i của $\operatorname{Sym}^{d_i} \mathcal{S}^*$. Vì vậy, đa tạp F là giao của các tập không điểm $F_k(X_i)$, và là tập không điểm của nhát cắt toàn cục $s = (s_1, \ldots, s_r)$ của phân thớ vectơ $\mathcal{F}$. $\square$

Chứng minh Định lý 2.5.3. Theo Định lý 2.4.2, lớp chu trình $[F_k(X)]$ là lớp Chern cao nhất của phân thớ vectơ $\mathcal{F}$. Nếu $\delta(n, \underline{d}, k) \geq 0$ thì

$$\deg(F_k(X)) = \int_{G(k+1,n+1)} \prod_{i=1}^{r} c_{\text{top}}(\operatorname{Sym}^{d_i} \mathcal{S}^*) \cdot c_1(\mathcal{S}^*)^{\delta(n,\underline{d},k)}, \tag{2.5}$$

trong đó $c_{\text{top}}(E)$ là lớp Chern cao nhất của phân thớ vectơ E.

Theo Nguyên lý chẻ, lớp đặc trưng

$$\prod_{i=1}^{r} c_{\text{top}}(\operatorname{Sym}^{d_i} \mathcal{S}^*) \cdot c_1(\mathcal{S}^*)^{\delta(n,\underline{d},k)}$$

là được biểu diễn dưới dạng một đa thức đối xứng

$$(-1)^{(k+1)(n-k)} \prod_{i=1}^{r} \prod_{a_0+\cdots+a_k=d_i, a_i \in \mathbb{N}} (a_0x_0 + \cdots + a_kx_k)(x_0 + \cdots + x_k)^{\delta(n,\underline{d},k)},$$

trong đó $x_0, \ldots, x_k$ là nghiệm Chern của phân thớ con $\mathcal{S}$ trên $G(k+1, n+1)$.

Áp dụng Định lý 2.3.2, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Chú ý rằng, công thức tính bậc (2.4) có vẻ tương tự như công thức của Debarre và Manivel trong Định lý 2.5.2. Tuy nhiên, ở đây chúng ta xem xét hệ số của đơn thức $x_0^n \cdots x_k^n$ trong tích của đa thức

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{a_0+\cdots+a_k=d_i, a_i\in\mathbb{N}} (a_0x_0 + \cdots + a_kx_k)(x_0 + \cdots + x_k)^{\delta(n,\underline{d},k)}$$

với biệt số

$$\Delta = \prod_{i\neq j}(x_i - x_j)$$

thay cho hệ số của đơn thức $x_0^n x_1^{n-1} \cdots x_k^{n-k}$ trong tích của đa thức trên với định thức Vandermonde

$$V = \prod_{i<j}(x_i - x_j).$$

Hơn nữa, phương pháp tiếp cận của chúng tôi hoàn toàn khác với phương pháp của Debarre - Manivel. Chúng tôi sử dụng kỹ thuật xử lý số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann được đề xuất bởi Hiep trong [33].

Ví dụ 2.5.2. Chúng ta trở lại với Ví dụ 2.4.1 ở trên. Theo định lý 2.5.3, bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ được tính như sau:

$$\deg(F_1(X)) = \frac{c(3,(3),1)}{2!},$$

trong đó $c(3,(3),1)$ là hệ số của đơn thức $x_0^3x_1^3$ trong khai triển của đa thức

$$3x_0(2x_0 + x_1)(x_0 + 2x_1)3x_1(x_0 - x_1)(x_1 - x_0).$$

Sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức cùng bậc, chúng ta thu được

$$c(3,(3),1) = 54.$$

Do đó, bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ là 27.

Ví dụ 2.5.3. Lấy $X \subset \mathbb{P}^4$ là một siêu mặt bậc 4. Trong trường hợp này, chiều của đa tạp Fano $F_1(X)$ là $\delta(4,(4),1) = 1$, tức là $F_1(X) \subseteq G(2,5) \subseteq \mathbb{P}^9$ là một đường cong xạ ảnh trơn. Bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ được tính như sau:

$$\deg(F_1(X)) = \frac{c(4,(4),1)}{2!},$$

trong đó $c(4,(4),1)$ là hệ số của đơn thức $x_0^4x_1^4$ trong khai triển của đa thức

$$4x_0(3x_0 + x_1)(2x_0 + 2x_1)(x_0 + 3x_1)4x_1(x_0 + x_1)(x_0 - x_1)(x_1 - x_0).$$

Sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức cùng bậc, chúng ta thu được

$$c(4,(4),1) = 640.$$

Do đó, bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ là 320.

Ví dụ 2.5.4. Lấy $X = X_1 \cap X_2 \subset \mathbb{P}^5$ là giao của hai siêu mặt X_1 và X_2 với $\deg(X_1) = 2$ và $\deg(X_2) = 3$. Trong trường hợp này, chiều của đa tạp Fano $F_1(X)$ là $\delta(5,(2,3),1) = 1$, tức là đa tạp Fano $F_1(X) \subset G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ là một đường cong xạ ảnh trơn. Bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ được tính như sau:

$$\deg(F_1(X)) = \frac{c(5,(2,3),1)}{2!},$$

trong đó $c(5,(2,3),1)$ là hệ số của đơn thức $x_0^5x_1^5$ trong khai triển của đa thức

$$2x_0(x_0+x_1)2x_1 3x_0(2x_0+x_1)(x_0+2x_1)3x_1(x_0+x_1)(x_0-x_1)(x_1-x_0).$$

Sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức cùng bậc, chúng ta thu được

$$c(5,(2,3),1) = 360.$$

Do đó, bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ là 180.

Ví dụ 2.5.5. Lấy $X = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \subset \mathbb{P}^6$ là giao của ba siêu mặt bậc 2. Khi đó, chiều của đa tạp Fano $F_1(X)$ là $\delta(6,(2,2,2),1) = 1$, tức là $F_1(X) \subset G(2,7)$ là một đường cong xạ ảnh trơn. Bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ được tính như sau:

$$\deg(F_1(X)) = \frac{c(6,(2,2,2),1)}{2!},$$

trong đó $c(6,(2,2,2),1)$ là hệ số của đơn thức $x_0^6x_1^6$ trong khai triển của đa thức

$$2x_0(x_0+x_1)2x_1 2x_0(x_0+x_1)2x_1 2x_0(x_0+x_1)2x_1(x_0+x_1)(x_0-x_1)(x_1-x_0).$$

Sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức cùng bậc, chúng ta thu được

$$c(6,(2,2,2),1) = 256.$$

Do đó, bậc của đa tạp Fano $F_1(X)$ là 128.

2.6 Công thức giống - bậc của đường cong Fano

Định lý 2.6.1. *Cho X là một giao đầy đủ tổng quát loại $\underline{d} = (d_1,\dots,d_r)$ trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. Nếu $\delta(n,\underline{d},k) = 1$ thì đa tạp Fano $F_k(X)$ là một đường cong xạ ảnh trơn liên thông với bậc d và giống g thỏa mãn đẳng thức sau:*

$$g = 1 + \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\binom{d_i+k}{k+1} - n - 1}{2}d.$$

Kết quả của Định lý 2.6.1 có thể xem như là một sự tổng quát cho các công việc của Markushevich [40] và Tennision [51].

Để chứng minh Định lý 2.6.1, trước tiên chúng tôi chứng minh Bổ đề sau.

Bổ đề 2.6.1. *Nếu E là phân thớ vectơ có hạng $k+1$ và $\operatorname{Sym}^m E$ là lũy thừa đối xứng bậc m của E thì hạng của $\operatorname{Sym}^m E$ là $\binom{m+k}{k}$ và*

$$c_1(\operatorname{Sym}^m E) = \binom{m+k}{k+1} c_1(E),$$

trong đó $c_1(E)$ là lớp Chern thứ nhất của phân thớ vectơ E.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh Bổ đề bằng phương pháp quy nạp theo m và k.

1. Với $m = 1$ ta có $\operatorname{Sym}^1 E = E$. Do đó, với mọi k, hạng của $\operatorname{Sym}^1 E$ là $\binom{1+k}{k} = k+1$ và
$$c_1(\operatorname{Sym}^1 E) = c_1(E) = \binom{1+k}{k+1} c_1(E).$$
Như vậy, bổ đề đúng với $(1, k)$, với mọi $k \geq 0$.

2. Với $k = 0$ thì E là một phân thớ đường thẳng. Do đó, với mọi m, $\operatorname{Sym}^m E$ cũng là một phân thớ đường thẳng. Suy ra hạng của $\operatorname{Sym}^m E$ là $\binom{m+0}{0} = 1$ và
$$c_1(\operatorname{Sym}^m E) = mc_1(E) = \binom{m+0}{0+1} c_1(E).$$
Như vậy, bổ đề đúng với $(m, 0)$, với mọi $m \geq 1$.

3. Với $m > 1$ và $k > 0$, giả sử rằng Bổ đề đúng với $(m-1, k)$ và $(m, k-1)$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng Bổ đề đúng với (m, k). Bằng cách lý luận tương tự như trong [20, Bổ đề 7.6], chúng ta xét dãy khớp của các phân thớ vectơ
$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0,$$
trong đó L là một phân thớ đường thẳng và E' là một phân thớ vectơ có hạng k. Vì vậy chúng ta có
$$c_1(E) = c_1(L) + c_1(E').$$
Theo tính phổ dụng của các lũy thừa đối xứng ([19, Mệnh đề A.2.2.d]) ta thấy rằng với mọi $m > 1$ ta có dãy khớp
$$0 \longrightarrow L \otimes \operatorname{Sym}^{m-1} E \longrightarrow \operatorname{Sym}^m E \longrightarrow \operatorname{Sym}^m E' \longrightarrow 0.$$

Do đó Bổ đề cũng đúng với $(m-1,k)$, vì thế hạng của $L \otimes \mathrm{Sym}^{m-1} E$ là hạng của $\mathrm{Sym}^{m-1} E$ và bằng $\binom{m-1+k}{k}$ và

$$\begin{aligned} c_1(L \otimes \mathrm{Sym}^{m-1} E) &= \binom{m-1+k}{k} c_1(L) + c_1(\mathrm{Sym}^{m-1} E) \\ &= \binom{m-1+k}{k} c_1(L) + \binom{m-1+k}{k+1} c_1(E). \end{aligned}$$

Do đó Bổ đề đúng với $(m,k-1)$, vì thế hạng của $\mathrm{Sym}^m E'$ là $\binom{m+k-1}{k-1}$ và

$$c_1(\mathrm{Sym}^m E') = \binom{m+k-1}{k} c_1(E').$$

Vì vậy hạng của $\mathrm{Sym}^m E$ là

$$\binom{m+k-1}{k-1} + \binom{m-1+k}{k} = \binom{m+k}{k},$$

và

$$\begin{aligned} c_1(\mathrm{Sym}^m E) &= c_1(L \otimes \mathrm{Sym}^{m-1} E) + c_1(\mathrm{Sym}^m E') \\ &= \binom{m-1+k}{k} c_1(L) + \binom{m-1+k}{k+1} c_1(E) + \binom{m+k-1}{k} c_1(E') \\ &= \binom{m+k-1}{k} c_1(E) + \binom{m+k-1}{k+1} c_1(E) \\ &= \binom{m+k}{k+1} c_1(E). \end{aligned}$$

Như vậy Bổ đề đúng với mọi (m,k). □

Chứng minh Định lý 2.6.1. Đặt $F = F_k(X)$. Nếu $\delta(n, \underline{d}, k) = 1$ thì bậc d và giống g của F thì được tính như sau:

$$d = \int_G [F] \cdot \sigma_1$$

và

$$g = 1 - \chi(\mathcal{O}_F) = 1 - \frac{1}{2} \int_F c_1(T_F),$$

trong đó T_F là phân thớ tiếp xúc trên F. Để xác định $c_1(T_F)$, chúng ta xem xét dãy khớp chuẩn tắc sau:

$$0 \longrightarrow T_F \longrightarrow T_G|_F \longrightarrow N_{F/G} \longrightarrow 0,$$

trong đó $N_{F/G}$ là phân thớ tầm thường của F trong G. Theo Bổ đề 2.5.1, F là tập các không điểm của $\mathcal{F}$ nên $N_{F/G}$ đẳng cấu $\mathcal{F}|_F$. Theo Bổ đề 2.6.1 và Mệnh đề 2.2.3, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\int_F c_1(T_F) &= \int_F (c_1(T_G|_F) - c_1(\mathcal{F}|_F)) \\
&= \int_G (c_1(T_G) - c_1(\mathcal{F})) \cdot [F] \\
&= \int_G \left((n+1)\sigma_1 - \sum_{i=1}^r c_1(\operatorname{Sym}^{d_i} \mathcal{S}^*) \right) \cdot [F] \\
&= \int_G \left((n+1) - \sum_{i=1}^r \binom{d_i+k}{k+1} \right) \sigma_1 \cdot [F] \\
&= \left(n+1 - \sum_{i=1}^r \binom{d_i+k}{k+1} \right) \int_G \sigma_1 \cdot [F] \\
&= \left(n+1 - \sum_{i=1}^r \binom{d_i+k}{k+1} \right) d.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã hoàn thành chứng minh công thức liên hệ giữa giống và bậc. □

Ví dụ 2.6.1. Cho X là một siêu mặt tổng quát bậc bốn ba chiều trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^4$. Trong trường hợp này, $\delta(4,(4),1) = 1$. Theo [52, Mục 2], đa tạp Fano $F_1(X)$ là đường cong xạ ảnh trơn bậc $d = 320$ và giống $g = 801$ thỏa mãn

$$g = 1 + \frac{\binom{5}{2} - 5}{2} d = 1 + \frac{5}{2} d.$$

Tổng quát hơn, nếu $X \subset \mathbb{P}^n$ ($n \geq 4$) là một siêu mặt bậc $2n-4$ thì đa tạp Fano $F_1(X) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+1}{2}-1}$ là đường cong xạ ảnh trơn bậc d và giống g thỏa mãn công thức sau:

$$g = 1 + \frac{\binom{2n-3}{2} - n - 1}{2} d.$$

Ví dụ 2.6.2. Cho $X \subset \mathbb{P}^5$ là một giao đầy đủ tổng quát loại $(2,3)$. Khi đó $\delta(5,(2,3),1) = 1$. Theo [43, Định lý 2.2 (i)], đa tạp Fano $F_1(X)$ là đường cong trơn bậc $d = 180$ và giống $g = 271$ thỏa mãn

$$g = 1 + \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2} - 6}{2} d = 1 + \frac{3}{2} d.$$

Tổng quát hơn, nếu $X \subset \mathbb{P}^n$ ($n \geq 5$) là một giao đầy đủ tổng quát loại $(n-3, n-2)$

thì $F_1(X)$ là đường cong xạ ảnh trơn bâc d và giống g thỏa mãn công thức sau:

$$g = 1 + \frac{\binom{n-2}{2} + \binom{n-1}{2} - n - 1}{2} d.$$

Ví dụ 2.6.3. Cho $X \subset \mathbb{P}^6$ là một giao đầy đủ tổng quát loại $(2, 2, 2)$. Khi đó $\delta(6, (2, 2, 2), 1) = 1$. Theo [43, Định lý 2.2 (ii)], đa tạp Fano $F_1(X)$ là đường cong xạ ảnh trơn bậc $d = 128$ và giống $g = 129$ thỏa mãn

$$g = 1 + \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} - 7}{2} d = 1 + d.$$

Tổng quát hơn, nếu $X \subset \mathbb{P}^n$ $(n \geq 6)$ là một giao đầy đủ tổng quát loại $(2, n-4, n-4)$ thì đa tạp Fano $F_1(X)$ đường cong xạ ảnh trơn bâc d và giống g thỏa mãn công thức sau:

$$g = 1 + \frac{2\binom{n-3}{2} - n + 2}{2} d.$$

Chương 3

Đặc trưng Euler của phân thớ Tango

Năm 1976, Hiroshi Tango [51] đã xây dựng một phân thớ vectơ không phân tách được hạng $n-1$ trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, gọi là phân thớ Tango. Áp dụng kỹ thuật tính toán của lý thuyết giao trên không gian xạ ảnh, chúng tôi đưa ra các kết quả cho các lớp đặc trưng của phân thớ Tango. Từ đó, dựa vào định lý Hirzebruch-Riemann-Roch, chúng tôi thiết lập công thức cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết các kết quả chính trong bài báo [14].

3.1 Xây dựng phân thớ Tango

Định nghĩa 3.1.1. ([45, Định nghĩa 4.1.1]). Phân thớ vectơ E trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ được gọi là phân thớ vectơ không phân tách được nếu nó không thể phân tích thành tổng trực tiếp của hai phân thớ vectơ con.

Với E là phân thớ vectơ trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ và i là số tự nhiên, ta sử dụng ký hiệu

$$h^i(\mathbb{P}^n, E) = \dim_{\mathbb{C}}(H^i(\mathbb{P}^n, E)),$$

trong đó $H^i(\mathbb{P}^n, E)$ là nhóm đối đồng điều thứ i của phân thứ vectơ E trên $\mathbb{P}^n$.

Định nghĩa 3.1.2. ([45, Định nghĩa 4.1.1]) Phân thớ vectơ E trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ được gọi là phân thớ đơn nếu $h^0(\mathbb{P}^n, E^* \otimes E) = 1$.

Chú ý rằng, nếu E là phân thớ đơn thì E là phân thớ vectơ không phân tách được.

Bổ đề 3.1.1 ([45, Bổ đề 4.3.1])**.** *Giả sử E là một phân thớ toàn cục với hạng $r > n$. Khi đó tồn tại một dãy khớp các phân thớ vectơ*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{r-n} \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

trong đó F là một phân thớ vectơ hạng n.

Chứng minh. Vì E là một phân thớ toàn cục nên đồng cấu định giá ev là toàn cấu. Do đó ta có dãy khớp

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\text{ev}} E \longrightarrow 0.$$

Hạt nhân K của đồng cấu định giá ev là phân thớ được xác định bởi

$$K = \{(x, s) \in \mathbb{P}_n \times H^0(\mathbb{P}^n, E) : s(x) = 0\}.$$

Thông qua các phân thớ xạ ảnh liên kết ta có một ánh xạ

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{P}(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, E)) & \longrightarrow & \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, E)) \\ & & (x, [s]) & \longmapsto & [s] \end{array},$$

trong đó ánh xạ thứ hai là phép chiếu lên thành phần thứ hai.

Với mỗi $[s] \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, E))$, thớ

$$f^{-1}([s]) \cong \{x \in \mathbb{P}^n : s(x) = 0\}$$

đẳng cấu với tập các không điểm của s.

Đặt $h^0(\mathbb{P}^n, E) = N + 1$. Khi đó f là một ánh xạ từ đa tạp phức $(n+N-r)$-chiều $\mathbb{P}(K)$ đến không gian xạ ảnh N - chiều $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, E))$. Suy ra

$$\operatorname{codim}(f(\mathbb{P}(K)), \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, E))) \geq r - n.$$

Do đó tồn tại một không gian con xạ ảnh $(r - n - 1)$ - chiều $\mathbb{P}(V)$ trong $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, E))$ mà không giao với $f(\mathbb{P}(K))$. Điều này có nghĩa là nhát cắt $s \in V \subseteq H^0(\mathbb{P}^n, E)$ không triệt tiêu. Khi đó dãy

$$V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\text{ex}} E$$

cho ta một phân thớ con tầm thường $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \subseteq E$ có hạng $r - n$. □

Hệ quả 3.1.1 ([45, Phần 4.3]). *Giả sử E là một phân thớ vectơ hạng r trên $\mathbb{P}^n$ với $r > n$. Khi đó tồn tại dãy khớp*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)^{\oplus(r-n)} \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

trong đó F là một phân thớ vectơ hạng n.

Để tìm một nhát cắt không triệt tiêu của phân thớ toàn cục E hạng r trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, ta chỉ cần xét lớp Chern cao nhất.

Bổ đề 3.1.2 ([45, Bổ đề 4.3.2]). *Nếu lớp Chern cao nhất $c_r(E)$ của phân thớ toàn cục E hạng r trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ triệt tiêu thì E chứa một phân thớ con tầm thường có hạng bằng 1.*

Chứng minh. Ta có thể giả sử $r \leq n$. Ta lại xét dãy

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\text{ev}} E \longrightarrow 0.$$

Đặt $N+1 = h^0(\mathbb{P}^n, E)$. Ánh xạ $f\colon \mathbb{P}(K) \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, E))$ biến đa tạp $(N+(n-r))$ chiều $\mathbb{P}(K)$ thành một không gian xạ ảnh N chiều. Lấy $[s] \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, E))$ là một giá trị chính quy của f. Khi đó $f^{-1}([s])$ là một đa tạp con $(n-r)$ - chiều của $\mathbb{P}(K)$, ký hiệu đa tạp này là Z. Ta có

$$Z = f^{-1}([s]) \cong \{x \in \mathbb{P}^n : s(x) = 0\}.$$

Như vậy, Z được xem như là một đa tạp con của $\mathbb{P}^n$.

Ta có s là hoành chính quy trên nhát cắt không điểm của E với tập không điểm Z và do đó $c_r(E)$ có thể được đồng nhất với lớp đối ngẫu $d_{\mathbb{P}^n}(Z)$ của Z. Theo giả thiết ta có

$$d_{\mathbb{P}^n}(Z) = 0 \quad \text{hay} \quad \deg Z = 0.$$

Điều này chỉ xảy ra khi $Z = \varnothing$. Vậy s không có không điểm. $\square$

Bây giờ ta sẽ xây dựng phân thớ Tango trên $\mathbb{P}^n$. Bắt đầu từ dãy khớp Euler sau

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0.$$

Lũy thừa ngoài cấp $n-1$ của dãy trên được xác định bởi

$$0 \longrightarrow \Lambda^{n-2}T_{\mathbb{P}^n}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus\binom{n+1}{n-1}} \longrightarrow \Lambda^{n-1}T_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Hơn nữa,

$$\Lambda^{n-1}T_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \otimes \det T_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(2).$$

Đặt $E = ((\Lambda^{n-2} T_{\mathbb{P}^n}(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))^*$. Khi đó đối ngẫu của dãy (3.1) là

$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus\binom{n+1}{2}} \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng E là một phân thớ toàn cục với hạng

$$r = \binom{n+1}{2} - n = \binom{n}{2}.$$

Với $n \geq 3$ ta có $r \geq n$, theo Hệ quả (3.1.1) tồn tại dãy khớp

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(r-n)} \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0,$$

trong đó E' là một phân thớ vectơ hạng n. Ta có E' cũng là phân thớ toàn cục. Lớp Chern cao nhất của E' là

$$c_n(E') = c_n(E) = 0.$$

Theo Bổ đề (3.1.2), E' chứa một phân thớ con tầm thường có hạng 1. Lấy T_n là thương, nghĩa là

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow E' \longrightarrow T_n \longrightarrow 0$$

là dãy khớp. Do đó ta tìm được một phân thớ T_n có hạng $n-1$ trên $\mathbb{P}^n$ với

$$c(T_n) = c(E') = c(E) = \frac{1}{c(T_{\mathbb{P}^n}(-2))} = \frac{1-2h}{(1-h)^{n+1}},$$

với h là lớp siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh T_n là phân thớ đơn. Xét các dãy

$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus\binom{n+1}{2}} \longrightarrow E \longrightarrow 0, \tag{3.2}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(r-n)} \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0, \tag{3.3}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow E' \longrightarrow T_n \longrightarrow 0. \tag{3.4}$$

Lấy tích tenxơ dãy đối ngẫu của dãy (3.4) với T_n và xét dãy đối đồng điều liên kết, ta được

$$h^0(\mathbb{P}^n, T_n^* \otimes T_n) \leq h^0(\mathbb{P}^n, E'^* \otimes T_n).$$

Thực hiện tương tự với dãy (3.3), ta được

$$h^0(\mathbb{P}^n, E'^* \otimes T_n) \leq h^0(\mathbb{P}^n, E^* \otimes T_n).$$

Ta chỉ còn phải chứng minh

$$h^0(\mathbb{P}^n, E^* \otimes T_n) = 1.$$

Lấy tích tenxơ (3.4) và (3.3) với E^*, ta được các dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow E^* \longrightarrow E^* \otimes E' \longrightarrow E^* \otimes T_n \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow E^{*\oplus(r-n)} \longrightarrow E^* \otimes E \longrightarrow E^* \otimes E' \longrightarrow 0.$$

Với chú $\Omega^k_{\mathbb{P}^n} = \Lambda^k \Omega^1_{\mathbb{P}^n}$, ta có

$$\begin{aligned} E^* &= \Lambda^{n-2} T_{\mathbb{P}^n}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \\ &\cong \Lambda^2 \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \det T_{\mathbb{P}^n}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \\ &\cong \Lambda^2 \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1) = \Omega^2_{\mathbb{P}^n}(2). \end{aligned}$$

Nhắc lại, số chiều của nhóm đối đồng điều $H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^k_{\mathbb{P}^n}(d))$ được tính bởi Công thức Bott như sau

$$h^q(\mathbb{P}^n, \Omega^k_{\mathbb{P}^n}(d)) = \begin{cases} \binom{d+n-k}{d}\binom{d-1}{k} & \text{nếu } q = 0, 0 \le k \le n, d > k \\ 1 & \text{nếu } 0 \le k = q \le n \\ \binom{-d+k}{-d}\binom{-d-1}{n-k} & \text{nếu } q = n, 0 \le k \le n, d < k - n \\ 0 & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Do đó từ công thức Bott ta suy ra

$$h^0(\mathbb{P}^n, E^*) = h^1(\mathbb{P}^n, E^*) = 0.$$

Điều này đủ để chỉ ra rằng

$$h^0(\mathbb{P}^n, E^*) = h^1(\mathbb{P}^n, E^*) = 0.$$

Do đó E là phân thớ vectơ đơn.
Tiếp theo ta lấy tích tenxơ (3.2) với E^*, khi đó dãy đối đồng điều liên kết cho ta kết quả

$$h^0(\mathbb{P}^n, E^* \otimes E) = h^1(\mathbb{P}^n, E^* \otimes T_{\mathbb{P}^n}(-2)).$$

Cuối cùng, lấy tích tenxơ dãy Euler với $E^*(-1)$ ta được

$$0 \longrightarrow E^*(-2) \longrightarrow E^*(-1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow E^* \otimes T_{\mathbb{P}^n}(-2) \longrightarrow 0,$$

dãy đối đồng điều của dãy này cho ta kết quả mong muốn

$$h^1(\mathbb{P}^n, E^*(-1)) = 0 \ \text{ và } \ h^2(\mathbb{P}^n, E^*(-2)) = 1.$$

Đẳng thức cuối có thể được suy ra từ Công thức Bott cùng với thực tế rằng

$$E^*(-1) = \Omega^2_{\mathbb{P}^n}(-1), \quad E^*(-2) = \Omega^2_{\mathbb{P}^n}.$$

Như vậy ta đã chứng minh được kết quả sau.

Định lý 3.1.1 ([45, Định lý 4.3.3])**.** *Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại một phân thớ vectơ T_n không phân tách được hạng $n-1$ trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với*

$$c(T_n) = \frac{1-2h}{(1-h)^{n+1}},$$

với h là lớp siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$. Phân thớ vectơ T_n được gọi là phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$.

3.2 Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch

Định nghĩa 3.2.1 ([22, Chương 3])**.** Cho E là một phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh trơn X. Gọi $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ là các nghiệm Chern của phân thớ vectơ E.

Đặc trưng Chern của phân thớ vectơ E, ký hiệu là $\mathrm{ch}(E)$, được định nghĩa bởi

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^{r} e^{\alpha_i}.$$

Lớp Todd của phân thớ vectơ E, ký hiệu là $\mathrm{td}(E)$, được định nghĩa bởi

$$\mathrm{td}(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{1-e^{-\alpha_i}}.$$

Chú ý rằng

$$e^{\alpha_i} = \sum_{n=0}^{r} \frac{\alpha_i^n}{n!} = 1 + \alpha_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2 + \frac{1}{6}\alpha_i^3 + \frac{1}{24}\alpha_i^4 + \ldots,$$

và

$$\frac{\alpha_i}{1-e^{-\alpha_i}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha_i + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!}\alpha_i^{2k},$$

trong đó B_k là số Bernoulli thỏa mãn quan hệ

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0.$$

Áp dụng Nguyên lý Chẻ và các khai triển trên ta có thể biểu diễn đặc trưng Chern và lớp Todd của phân thớ vectơ E theo các lớp Chern như sau:

$$\mathrm{ch}(E) = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \cdots$$

$$\mathrm{td}(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 - \frac{1}{720}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 - 3c_2^2 - c_1c_3 + c_4) + \cdots.$$

Mệnh đề 3.2.1 ([22, Chương 3])**.** *Cho E và F là hai phân thớ vectơ. Khi đó*

$$\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{ch}(F).$$

$$\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F).$$

$$\mathrm{td}(E \oplus F) = \mathrm{td}(E) \cdot \mathrm{td}(F).$$

Mệnh đề 3.2.2 ([22, Chương 3])**.** *Giả sử $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ là một dãy khớp ngắn các phân thớ vectơ trên X. Khi đó*

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(E') + \mathrm{ch}(E'').$$

Mệnh đề 3.2.3 ([22, Chương 3])**.** *Mối liên hệ giữa đặc trưng Chern và các lớp Chern của một phân thớ vectơ E được cho bởi*

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \det(M_k),$$

trong đó $c_k = c_k(E)$ và ma trận M_k được xác định như sau

$$M_k = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2c_2 & c_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (k-1)c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \cdots & 1 \\ kc_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 \end{pmatrix}$$

Quy ước $\det(M_0) = \mathrm{rank}\, E$.

Mệnh đề 3.2.4 ([22, Chương 15])**.** *Mối liên hệ giữa đặc trưng Chern và lớp Todd của một phân thớ vectơ E hạng r được cho bởi*

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \mathrm{ch}(\wedge^i E^*) = c_r(E) \cdot \mathrm{td}(E)^{-1}.$$

Cho E là phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh trơn X. Nhắc lại rằng, đặc trưng Euler của phân thớ vectơ E, ký hiệu là $\chi(X, E)$, được định nghĩa bởi tổng hình thức

$$\chi(X, E) = \sum_k (-1)^k h^k(X; E),$$

trong đó $h^k(X; E)$ là số chiều của nhóm đối đồng điều thứ k của E trên X.

Định lý 3.2.1 ([22, Chương 15])**.** *(Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch). Đặc trưng Euler của phân thớ vectơ E trên đa tạp xạ ảnh trơn X được tính bởi công thức*

$$\chi(X,E) = \int_X \mathrm{ch}(E).\,\mathrm{td}(T_X), \tag{3.5}$$

trong đó $\int_X \alpha$ là bậc của chu trình α trong vành Chow $A(X)$.

Công thức (3.5) cho chúng ta một phương pháp hiệu quả để tính đặc trưng Euler của phân thớ vectơ E trên đa tạp xạ ảnh trơn X theo đặc trưng Chern của E và lớp Todd của phân thớ tiếp xúc T_X. Đặc biệt, trên không gian xạ ảnh đặc trưng Chern và lớp Todd có cấu trúc rất đơn giản. Vì thế, công thức (3.5) là một công cụ thực sự mạnh để thực hiện các tính toán trên không gian xạ ảnh.

3.3 Đặc trưng Chern của phân thớ Tango

Mệnh đề 3.3.1. *Các lớp Chern của phân thớ Tango T_n trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ được xác định bởi*

$$c_k(T_n) = \left[\binom{n+k}{k} - 2\binom{n+k-1}{k-1}\right] h^k,\ k = 1, 2, \dots,$$

với h là lớp siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$.

Chứng minh. Theo Định lý 3.1.1, lớp Chern toàn phần của phân thớ Tango T_n là

$$c(T_n) = \frac{1-2h}{(1-h)^{n+1}}. \tag{3.6}$$

Ta có

$$\frac{1}{(1-h)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{k} h^k.$$

Khai triển (3.6) ta được

$$\begin{aligned} c(T_n) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} h^k - 2h \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} h^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k}{k} h^k - 2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{k-1} h^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n+k}{k} - 2\binom{n+k-1}{k-1}\right] h^k. \end{aligned}$$

Do đó, lớp Chern thứ k của phân thớ Tango được cho bởi $c_k(T_n) = c_k h^k$, trong đó

$$c_k = \binom{n+k}{k} - 2\binom{n+k-1}{k-1}, \quad \text{với } k = 1, 2, \ldots.$$

Ta có $c_0 = 1$ và $c_k = 0$ với mọi $k \geq n$. $\square$

Mệnh đề tiếp theo cho ta đặc trưng Chern của phân thớ Tango.

Mệnh đề 3.3.2. *Với số nguyên $n \geq 3$, đặc trưng Chern của phân thớ Tango T_n trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ được xác định bởi*

$$\mathrm{ch}(T_n) = (n-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k - (-1)^k(n+1)}{k!} h^k.$$

trong đó h là lớp siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$.

Chứng minh. Đầu tiên chúng ta xác định lớp Chern toàn phần của các phân thớ đường thẳng $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ và $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)$ là

$$c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = 1 - h, \; c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)) = 1 - 2h.$$

Khi đó chúng ta có

$$\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-h)^k, \; \mathrm{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-2h)^k.$$

Xét dãy khớp

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)}(-1) \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-2) \longrightarrow 0, \tag{3.7}$$

chúng ta thu được

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(T_{\mathbb{P}^n}(-2)) &= (n+1)\,\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) - \mathrm{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)) \\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-h)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-2h)^k. \end{aligned}$$

Từ dãy khớp (3.2) ta có kết quả

$$\mathrm{ch}(E) = \frac{1}{2}n(n+1)\,\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) - \mathrm{ch}(T_{\mathbb{P}^n}(-2)).$$

Từ dãy khớp (3.3) ta có kết quả

$$\mathrm{ch}(E') = \mathrm{ch}(E) - (r-n)\,\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}).$$

Vì $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ là phân thớ tầm thường nên $\operatorname{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \operatorname{rank}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \dfrac{1}{2}n(n-1) - n + 1$.
Từ dãy khớp (3.4) chúng ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(T_n) &= \operatorname{ch}(E') - \operatorname{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\
&= \operatorname{ch}(E) - (r-n+1)\operatorname{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\
&= (2n-1)\operatorname{ch}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) - \operatorname{ch}(T_{\mathbb{P}^n}(-2)) \\
&= (n-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k - (-1)^k(n+1)}{k!} h^k.
\end{aligned}$$

□

3.4 Lớp Todd của phân thớ tiếp xúc trên không gian xạ ảnh

Đầu tiên, chúng tôi trình bày định nghĩa và đưa ra một số tính chất của các số Stirling loại một. Các số này là cầu nối liên kết cho các tính toán liên quan đến lớp Todd của phân thớ tiếp xúc trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ và đặc trưng Euler của phân thớ Tango.

Định nghĩa 3.4.1. ([47, Chương 4]). Cho các số nguyên dương k và n. Các *số Stirling loại một*, ký hiệu là $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, được định nghĩa bởi hệ số của x^k trong khai triển của

$$R_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Ta quy ước $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$.

Ví dụ 3.4.1. Một số giá trị đầu tiên của các số Stirling loại một được bởi bảng sau

	0	1	2	3	4	5
0	1	•	•	•	•	•
1	0	1	•	•	•	•
2	0	1	1	•	•	•
3	0	2	3	1	•	•
4	0	6	11	6	1	•
5	0	24	50	35	10	1

Chú ý 3.4.1. Các số Stirling loại một $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ còn có thể được định nghĩa là số cách sắp xếp n phần tử thành k xích. Ví dụ, có tất cả $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$ cách xếp 4 phần tử thành 2 xích, cụ thể như sau

$$[1,2,3][4], \quad [1,2,4][3], \quad [1,3,4][2], \quad [2,3,4][1],$$
$$[1,3,2][4], \quad [1,4,2][3], \quad [1,4,3][2], \quad [2,4,3][1],$$
$$[1,2][3,4], \quad [1,3][2,4], \quad [1,4][2,3].$$

Tiếp theo ta xét một số tính chất của các số Stirling loại một.

Bổ đề 3.4.1 ([47, Chương 4])**.** *Với n và k là các số nguyên dương, ta có:*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Ta có

$$R_{n+1}(x) = x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n) = nR_n(x) + xR_n(x).$$

Hệ số của x^k ở vế trái là $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}$.

Hệ số của x^k trong $nR_n(x)$ là $n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Hệ số của x^k trong $xR_n(x)$ là $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$.

Bằng cách so sánh các hệ số của x^k ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bổ đề 3.4.2 ([47, Chương 4]). *Với n và k là các số nguyên dương, ta có:*

i. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!.$

ii. $\dfrac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = n.$

Chứng minh. □

i. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$, theo định nghĩa ta có

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 = 0!.$$

Giả sử kết quả đúng với số nguyên dương n. Khi đó, từ giả thiết quy nạp ta suy ra

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + n \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = n.(n-1)! = n!.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

ii. Xét đa thức $R_n(x)$ như trong định nghĩa các số Stirling. Ta có $R_{n+1}(1) = (n+1)!$, kết hợp với (i) và định nghĩa các số Stirling ta suy ra

$$\begin{aligned} (n+1)! &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = n! + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = (n+1)! - n! = n!(n+1) - n! = n!n.$$

Vậy đẳng thức thứ hai được chứng minh.

Định nghĩa 3.4.2. ([47, Chương 4]). Cho k là một số nguyên không âm, đa thức Stirling, ký hiệu bởi $S_n(x)$, được xác định bởi hàm mũ

$$\left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)^{x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

Ví dụ 3.4.2. Đa thức Stirling

$$\begin{aligned}
S_0(x) &= 1,\\
S_1(x) &= \frac{1}{2}(x+1),\\
S_2(x) &= \frac{1}{12}(3x^2+5x+2).
\end{aligned}$$

Kết quả sau đây cho ta mối liên hệ giữa đa thức Stirling và các số Stirling loại một.

Bổ đề 3.4.3 ([47, Chương 4])**.** *Cho k và n là các số nguyên dương. Khi đó*

$$\binom{n}{k} S_k(n) = \begin{bmatrix} n+1 \\ n-k+1 \end{bmatrix},$$

trong đó $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Mệnh đề 3.4.1. *Lớp Todd của phân thớ tiếp xúc trên $\mathbb{P}^n$ là*

$$\operatorname{td}(T_{\mathbb{P}^n}) = \left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S_k(n)\frac{h^k}{k!}.$$

trong đó h là lớp siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$.

Chứng minh. Xét dãy khớp Euler trên $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0,$$

trong đó $T_{\mathbb{P}^n}$ là phân thớ tiếp xúc của $\mathbb{P}^n$. Ta có $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 1 + 0h = 1$ và $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = 1 + h$. Từ đó suy ra

$$c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}) = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{n+1} = (1+h)^{n+1}.$$

Áp dụng mệnh đề (1.2.4) vào dãy khớp Euler, ta có

$$c(T_{\mathbb{P}^n}) = \frac{c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)})}{c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})} = (1+h)^{n+1}.$$

Điều này chứng tỏ rằng $T_{\mathbb{P}^n}$ và $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$ có cùng các lớp Chern và do đó chúng có cùng lớp Todd. Vì các nghiệm Chern của phân thớ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$ là $n+1$ lần h nên ta có

$$\operatorname{td}(T_{\mathbb{P}^n}) = \operatorname{td}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{n+1} = \left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S_k(n)\frac{h^k}{k!}.$$

Vậy mệnh đề được chứng minh xong. $\square$

3.5 Đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh

Định lý 3.5.1. *Cho E là một phân thớ vectơ trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. Khi đó đặc trưng Euler của phân thớ E là*

$$\chi(\mathbb{P}^n, E) = \operatorname{rank}(E) + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \det(M_k).$$

trong đó M_k là ma trận được xác định như trong Mệnh đề 3.2.3.

Chứng minh. Áp dụng Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch cho phân thớ vectơ E trên $\mathbb{P}^n$ ta được

$$\chi(\mathbb{P}^n, E) = \int_{\mathbb{P}^n} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\det(M_k).\frac{h^{n+1}}{(1-e^{-h})^{n+1}}.$$

Theo Định nghĩa 3.4.2, ta có thể khai triển biểu thức tính $\operatorname{td}(T_{\mathbb{P}^n})$ thành đa thức theo biến h như sau

$$\frac{h^{n+1}}{(1-e^{-h})^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S_k(n) h^k.$$

Do đó, ta chỉ cần tìm hệ số của h^n trong khai triển của

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\det(M_k)}{k!}\right) . \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} S_k(n) h^k\right).$$

Hệ số của h^n trong khai triển của tích trên được xác định bởi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\det(M_k)}{k!}\frac{S_{n-k}(n)}{(n-k)!} &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} S_{n-k}(n)\det(M_k) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k}(n)\det(M_k) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \det(M_k) \\
&= \frac{1}{n!} n! \det(M_0) + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \det(M_k) \\
&= \operatorname{rank}(E) + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \det(M_k).
\end{aligned}$$

Đẳng thức thứ ba được suy ra từ Mệnh đề 3.4.3, đẳng thức thứ tư được suy ra từ Mệnh đề 3.4.2 (i). □

Áp dụng Định lý 3.5.1, Mệnh đề 3.3.2 và Mệnh đề 3.4.1 ta thu được kết quả cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango.

Định lý 3.5.2. *Đặc trưng Euler của phân thớ Tango T_n trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ là $2n-1$.*

Chứng minh. Vì phân thớ Tango T_n trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ có hạng bằng $n-1$ nên từ Định lý 3.5.1 ta suy ra

$$\chi(\mathbb{P}^n, T_n) = (n-1) + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \det(M_k).$$

Vì các hệ số của các ma trận M_k là các lớp Chern của phân thớ Tango T_n trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ nên từ Mệnh đề 3.3.2 và Mệnh đề 3.2.3 ta suy ra

$$\det(M_k) = (-2)^k - (-1)^k(n+1).$$

Theo định nghĩa của số Stirling ta có

$$\begin{aligned} xR(x+1) &= x(x+1)(x+2)\dots(x+n) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} x^{k+1}. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$R(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} x^k.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} x^k = R(x+1) - \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = R(x+1) - n!.$$

Vì $R(-1) = R(0) = 0$, nên chúng ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} p_k &= \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} (-2)^k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} (-1)^k \\ &= R(-1) - n! - (n+1)(R(0) - n!) \\ &= n!n. \end{aligned}$$

Do đó

$$\chi(\mathbb{P}^n, T_n) = (n-1) + \frac{n!n}{n!} = (n-1) + n = 2n - 1.$$

$\square$

Tiếp theo, ta sẽ áp dụng Định lý 3.5.1 để tính đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với một vài giá trị của n.

Ví dụ 3.5.1. Ta sẽ tính đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^3$. Hạng của phân thớ này là 2. Ta có

$$\begin{array}{lll} c_1 = 2, & c_2 = 2, & c_3 = 0, \\ \det(M_1) = 2, & \det(M_2) = 0, & \det(M_3) = -4. \end{array}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{P}^3, F) &= 2 + \frac{1}{6}\left(2\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{6}(2.11 + 0.6 - 4.1) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.5.2. Ta sẽ tính đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^4$. Hạng của phân thớ này là 3. Ta có

$$\begin{array}{llll} c_1 = 3, & c_2 = 5, & c_3 = 5, & c_4 = 0. \\ \det(M_1) = 3, & \det(M_2) = -1, & \det(M_3) = -3, & \det(M_4) = 11. \end{array}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{P}^4, F) &= 3 + \frac{1}{24}\left(3\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}\right) \\ &= 3 + \frac{1}{24}(3.50 - 35 - 3.10 + 11.1) \\ &= 7. \end{aligned}$$

Chương 4

Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định

Quy hoạch nửa xác định là một bài toán quan trọng của Quy hoạch toán học bắt đầu từ năm 1990. Bài toán này có ứng dụng rất đa dạng trong Tối ưu lồi, Lý thuyết điều khiển và Tối ưu hóa tổ hợp. Bắt đầu từ mối liên hệ giữa bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định với số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann được đưa ra bởi von Bothmer-Ranestad [11]. Sử dụng các kết quả liên quan đến đồng nhất thức trên đa thức đối xứng kép và kỹ thuật xử lý số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann được đưa ra bởi Hiep [33], chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định.

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả chính của bài báo [37]. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định thông qua hệ số của một đơn thức trong khai triển của một đa thức đối xứng kép. Đồng thời, sử dụng đặc trưng này kết hợp với các kết quả được chúng tôi chỉ ra của lớp các đa thức đối xứng, chúng tôi chứng minh lại những kết quả được chỉ ra bởi Nie-Ranestad-Sturmfels trong [44] theo một cách đơn giản hơn.

4.1 Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định

Chúng ta ký hiệu $\mathbb{S}^n$ là không gian vectơ $\binom{n+1}{2}$-chiều của các ma trận đối xứng cấp n trên trường số thực $\mathbb{R}$ và $\mathbb{QS}^n$ khi các phần tử của các ma trận đối xứng cấp n thuộc trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

Định nghĩa 4.1.1 ([44]). Ma trận $X \in \mathbb{S}^n$ được gọi là ma trận đối xứng nửa xác định dương, ký hiệu là $X \succeq 0$, nếu $u^T X u \geq 0$, với mọi $u \in \mathbb{R}^n$. Ma trận $X \in \mathbb{S}^n$ được gọi là ma trận đối xứng xác định dương, ký hiệu là $X \succ 0$, nếu $u^T X u > 0$, với mọi $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Định nghĩa 4.1.2 ([44]). Cho hai ma trận $C, X \in \mathbb{S}^n$. Tích vô hướng của C và X, ký hiệu bởi $C \bullet X$, được định nghĩa bởi:

$$C \bullet X := \mathrm{Trace}(C \cdot X) = \sum c_{ij} x_{ij}.$$

Ví dụ 4.1.1. Cho hai ma trận đối xứng

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} C \bullet X &:= x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 9x_{22} + 0x_{23} + 3x_{31} + 0x_{32} + 7x_{33} \\ &= x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{22} + 7x_{33}. \end{aligned}$$

Bài toán 4.1.1 ([44]). *Quy hoạch nửa xác định là một bài toán tối ưu có dạng:*

$$\min_{X \in \mathbb{S}^n} C \bullet X, \tag{4.1}$$

với các ràng buộc

$$A_i \bullet X = b_i, \forall i = 1, \ldots, m; \tag{4.2}$$

$$X \succeq 0; \tag{4.3}$$

trong đó $C, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{QS}^n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}$.

Ràng buộc (4.2) và (4.3) được gọi là thỏa mãn chặt, nếu tồn tại ma trận đối xứng $X \succ 0$ sao cho

$$A_i \bullet X = b_i, \forall i = 1, \ldots, m.$$

Ví dụ 4.1.2. Với n = 4, m = 3, cho các ma trận đối xứng:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44}; \end{pmatrix}; b_1 = 1; b_2 = 1; b_3 = 1.$$

Quy hoạch nửa xác định được phát biểu dưới dạng:

$$\min(x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}),$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} -2x_{12} + x_{22} - 2x_{34} = 1, \\ -2x_{12} - 2x_{13} - 2x_{14} - 2x_{23} - 2x_{24} - x_{33} = 1, \\ -x_{11} - 2x_{14} - 2x_{23} - 2x_{34} + x_{44} = 1, \\ X \succeq 0. \end{cases}$$

Bài toán 4.1.2. *Đối ngẫu của quy hoạch nửa xác định là bài toán được phát biểu như sau:*

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \tag{4.4}$$

với ràng buộc

$$A(y) = C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \succeq 0. \tag{4.5}$$

Ràng buộc (4.5) được gọi là thỏa mãn chặt, nếu tồn tại $y \in \mathbb{R}^m$ sao cho

$$A(y) = C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \succ 0.$$

Ví dụ 4.1.3. Bài toán đối ngẫu của quy hoạch nửa xác định ở Ví dụ 4.1.2 là:

$$\max\ (y_1 + y_2 + y_3),$$

với ràng buộc

$$\begin{pmatrix} 1 + y_3 & y_1 + y_2 & y_2 & y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 & 1 - y_1 & y_2 - y_3 & y_2 \\ y_2 & y_2 - y_3 & 1 + y_2 & y_1 + y_3 \\ y_2 + y_3 & y_2 & y_1 + y_3 & 1 - y_3 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Điều kiện tối ưu của quy hoạch nửa xác định và đối ngẫu của nó được chỉ ra trong Định lý sau:

Định lý 4.1.1 ([53, Mục 3] hoặc [55, Chương 4]). *Giả sử quy hoạch nửa xác định và đối ngẫu của nó thỏa mãn chặt. Khi đó, tồn tại phương án tối ưu $\hat{X} \in \mathbb{S}^n$ và $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$A_i \bullet \hat{X} = b_i, \forall i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.6}$$

$$A(\hat{y}) \cdot \hat{X} = 0, \tag{4.7}$$

$$A(\hat{y}) \succeq 0 \text{ và } \hat{X} \succeq 0. \tag{4.8}$$

Bây giờ chúng ta giả sử các dữ liệu $C, A_1, \ldots, A_m$, b là tổng quát trên trường $\mathbb{Q}$. Trong thực tế, chúng ta có thể chọn các phần tử của các ma trận này là các số nguyên tùy ý và tính phương án tối ưu $\hat{X}$ và $\hat{y}$ từ các dữ liệu đó bằng phương pháp điểm nội. Nhưng theo phương pháp đại số, chúng ta có thể dựa trên các điều kiện (4.6), (4.7), (4.8) để xác định các phương án tối ưu $\hat{X}$ và $\hat{y}$. Cụ thể, chúng ta thành lập một hệ các phương trình đa thức dựa các điều kiện (4.6), (4.7), (4.8) và giải hệ phương trình này bằng cách sử dụng các tính toán hình thức, kết quả thu được là các biểu diễn chính xác của các phương án tối ưu $\hat{X}$ và $\hat{y}$. Chúng ta sẽ minh họa cách tiếp cận này bằng Ví dụ sau đây.

Ví dụ 4.1.4 ([44, Ví dụ 4]). Xét bài toán quy hoạch nửa xác định trong Ví dụ 4.1.3.

$$\max\ (y_1 + y_2 + y_3),$$

với ràng buộc

$$\begin{pmatrix} 1+y_3 & y_1+y_2 & y_2 & y_2+y_3 \\ y_1+y_2 & 1-y_1 & y_2-y_3 & y_2 \\ y_2 & y_2-y_3 & 1+y_2 & y_1+y_3 \\ y_2+y_3 & y_2 & y_1+y_3 & 1-y_3 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Sử dụng phần mềm SeDuMi [50], chúng ta dễ dàng tìm được phương án tối ưu

$$(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) = (0.3377\ldots, 0.5724\ldots, 0.3254\ldots).$$

Điều mà chúng ta quan tâm là hiểu bản chất của ba con số này.

Dựa vào điều kiện (4.6), chúng ta có hệ phương trình đa thức

$$\begin{cases} -2x_{12} + x_{22} - 2x_{34} = 1, \\ -2x_{12} - 2x_{13} - 2x_{14} - 2x_{23} - 2x_{24} - x_{33} = 1, \\ -x_{11} - 2x_{14} - 2x_{23} - 2x_{34} + x_{44} = 1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Dựa vào điều kiện (4.7), chúng ta có 16 phương trình sau

$$\begin{cases} (1+y_3)x_{11} + (y_1+y_2)x_{21} + y_2x_{31} + (y_2+y_3)x_{41} = 0 \\ (1+y_3)x_{12} + (y_1+y_2)x_{22} + y_2x_{32} + (y_2+y_3)x_{42} = 0 \\ (1+y_3)x_{13} + (y_1+y_2)x_{23} + y_2x_{33} + (y_2+y_3)x_{43} = 0 \\ 1+y_3)x_{14} + (y_1+y_2)x_{24} + y_2x_{34} + (y_2+y_3)x_{44} = 0 \\ \dots \\ (y_2+y_3)x_{14} + y_2x_{24} + y_2x_{34} + (y_1+y_3)x_{44} = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Hai hệ phương trình (4.9) và (4.10) tạo thành hệ gồm 19 phương trình đa thức với 13 biến $y_1, y_2, y_3, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{44}$. Sử dụng các phương pháp tính toán hình thức (chẳng hạn như, cơ sở Gröbner trong Macaulay 2 trong [23]), chúng ta chỉ rằng các phương trình này có hữu hạn các nghiệm phức. Số các nghiệm là 26. Thật vậy, bằng cách khử các biến, chúng ta phát hiện ra rằng mỗi tọa độ y_i hoặc x_{jk} thỏa mãn một phương trình một biến bậc 26. Đặc biệt, đa thức một biến này không bất khả quy nhưng các nhân tử của chúng lại bất khả quy. Chẳng hạn như, phương án $\hat{y}_1$ thỏa mãn đa thức một biến $f(y_1)$ có hai nhân tử là đa thức $g(y_1)$ bậc 16 và đa thức $h(y_1)$ bậc 10, đó là

$$f(y_1) = g(y_1) \cdot h(y_1),$$

trong đó

$$\begin{aligned} g(y_1) = {} & 403538653715069011y_1^{16} - 2480774864948860304y_1^{15} \\ & +6231483282173647552y_1^{14} - 5986611777955575152y_1^{13} + \\ & + \dots + 593960886480114 56y_1^2 - 4451473629111296y_1 + 149571632340416 \end{aligned}$$

và

$$h(y_1) = 2018y_1^{10} - 12156y_1^9 + 17811y_1^8 + \dots + 1669y_1 - 163.$$

Cả hai đa thức $g(y_1)$ và $h(y_1)$ đều bất khả quy trên $\mathbb{Q}(y_1)$.

Thế giá trị tối ưu $\hat{y}_1 = 0,3377\dots$ vào $g(y_1)$ ta thấy rằng $\hat{y}_1$ thỏa mãn $g(y_1) = 0$. Vì vậy, $\hat{y}_1$ là một số đại số có bậc bằng 16 trên $\mathbb{Q}$. Điều tương tự cũng xảy ra với các giá trị tối ưu $\hat{y}_i$ và $\hat{x}_{jk}$ khác. Chúng ta kết luận rằng bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định này bằng 16. Chú ý rằng ma trận $A(\hat{(}y)$ có hạng bằng 3 và ma trận $\hat{X}$ có hạng bằng 1.

Bây giờ chúng ta có thể thay đổi dữ liệu đầu vào và thực hiện phân tích tham số. Ví dụ, nếu hàm mục tiêu được thay đổi thành $y_1 - y_2$ thì bậc đại số là 10 và các hạng của các ma trận tối ưu đều là 2.

Ta thấy, khi cho $m = 3, n = 4$ theo [44] nếu các dữ liệu C, b, A_i là tổng quát, bậc đại số của quy hoạch nửa xác định này là 16 khi ma trận tối ưu $\hat{Y} = A(\hat{y})$ có hạng bằng 3, bậc đại số là 10 khi ma trận tối ưu $\hat{Y} = A(\hat{y})$ có hạng bằng 2 và khi ma trận tối ưu $\hat{Y} = A(\hat{y})$ có hạng bằng hạng 1 hoặc 4 thì phương án tối ưu không tồn tại.

Với m, n rất lớn, việc giải các phương trình 4.6 - 4.7 không dễ dàng. Tuy nhiên chúng ta biết rằng các tọa độ $\hat{y}_i$ và $\hat{x}_{jk}$ của phương án tối ưu là các nghiệm của các đa thức một biến bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. Nếu dữ liệu là tổng quát thì bậc của các đa thức này chỉ phụ thuộc vào hạng r của phương án tối ưu. Bậc này được gọi là *bậc đại số* trong quy hoạch nửa xác định (4.1.1) và đối ngẫu của nó, ký hiệu là $\delta(m, n, r)$.

Trong phạm vi của luận án này, ta xem phương án tối ưu của quy hoạch nửa xác định luôn tồn tại và mục tiêu là xác định công thức tính bậc đại số $\delta(m, n, r)$.

Chú ý rằng, bậc đại số $\delta(m, n, r)$ trong quy hoạch nửa xác định được định nghĩa tốt nếu bộ ba số (m, n, r) thỏa mãn bất đẳng thức Pataki sau:

Định lý 4.1.2 ([44, Mệnh đề 5])**.** *(Bất đẳng thức Pataki). Cho r và $n - r$ lần lượt là hạng của các ma trận tối ưu $A(\hat{y})$ và $\hat{X}$. Khi đó, ta có:*

$$\binom{n-r+1}{2} \leq m \leq \binom{n+1}{2} - \binom{r+1}{2}.$$

4.2 Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định thông qua bậc của đa tạp đối ngẫu

Nie-Ranestad-Sturmfels trong [44] đã chứng minh bậc đại số $\delta(m, n, r)$ trong quy hoạch nửa xác định bằng bậc của đa tạp đối ngẫu bằng phương pháp của hình học đại số phức. Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày lại các kết quả của Nie-Ranestad-Sturmfels mà không chứng minh chi tiết.

Cho $\mathcal{U} = \{C, A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ là một không gian con tuyến tính sinh bởi hệ $m+1$ ma trận đối xứng thuộc $\mathbb{S}^n$. Ta kí hiệu $D^r_{\mathcal{U}}$ là đa tạp định thức của các ma trận đối xứng hạng không lớn hơn r trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ tương ứng.

Định lý 4.2.1 ([44, Định lý 13])**.** *Đa tạp đối ngẫu* $(D^r_{\mathcal{U}})^*$ *là một siêu mặt nếu và chỉ nếu bất đẳng thức Pataki thỏa mãn và trong trường hợp này bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định bằng bậc của siêu mặt* $(D^r_{\mathcal{U}})^*$*:*

$$\delta(m,n,r) = \deg(D^r_{\mathcal{U}})^*.$$

Đặc biệt, nghiên cứu của họ đã đưa ra một số công thức tường minh của bậc đại số $\delta(m,n,r)$ với các giá trị đặc biệt khác nhau của m,n,r.

Mệnh đề 4.2.1 ([44, Mệnh đề 9])**.** *Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định thỏa mãn quan hệ đối ngẫu*

$$\delta(m,n,r) = \delta\left(\binom{n+1}{2} - m, n, n-r\right).$$

Định lý 4.2.2 ([44, Định lý 11])**.** *Với các giá trị* m,n,r *đặc biệt, bậc đại số* $\delta(m,n,r)$ *trong quy hoạch nửa xác định được cho bởi các công thức sau:*

i. Nếu $r = n-1$ *thì*

$$\delta(m,n,n-1) = 2^{m-1}\tbinom{n}{m}.$$

ii. Nếu $r = n-2$ *thì*

$$\delta(3,n,n-2) = \tbinom{n+1}{3},$$
$$\delta(4,n,n-2) = 6\tbinom{n+1}{4},$$
$$\delta(5,n,n-2) = 27\tbinom{n+1}{5} + 3\tbinom{n+1}{4}.$$

iii. Nếu $r = n-3$ *và* $6 \le m \le 9$ *thì*

$$\delta(6,n,n-3) = 2\tbinom{n+2}{6} + \tbinom{n+2}{5},$$
$$\delta(7,n,n-3) = 28\tbinom{n+3}{7} - 12\tbinom{n+2}{6},$$
$$\delta(8,n,n-3) = 248\tbinom{n+4}{8} - 320\tbinom{n+3}{7} + 84\tbinom{n+2}{6},$$
$$\delta(9,n,n-3) = 1794\tbinom{n+5}{9} - 3778\tbinom{n+4}{8} + +2436\tbinom{n+3}{7} - 448\tbinom{n+2}{6}.$$

4.3 Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định như số giao trên đa tạp Grassmann

Bằng ngôn ngữ của lý thuyết giao, von Bothmer-Ranestad [11] đã chỉ ra rằng bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định có thể tính như số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann. Trong phần này, chúng tôi trình bày lại các kết quả của von Bothmer-Ranestad mà không chứng minh chi tiết.

Với bộ ba số (m,n,r) thỏa mãn bất đẳng thức Pataki (4.1.2), để thuận tiện trong việc trình bày công thức ta đặt:

$$u = m - \binom{n-r+1}{2} \text{ và } v = \binom{n+1}{2} - m - \binom{r+1}{2}.$$

Định lý 4.3.1 ([11, Mệnh đề 4.1])**.** *Bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định được xác định bởi công thức sau:*

$$\delta(m,n,r) = \int_{G(r,n)} s_u(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{Q})s_v(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*), \tag{4.11}$$

trong đó $\mathcal{S}$ và $\mathcal{Q}$ lần lượt là phân thớ con phổ dụng và phân thớ thương phổ dụng trên đa tạp Grassmann $G(r,n)$, $\mathrm{Sym}^2\mathcal{Q}$ và $\mathrm{Sym}^2\mathcal{S}^*$ lần lượt là lũy thừa đối xứng thứ hai của $\mathcal{Q}$ và của đối ngẫu $\mathcal{S}^*$, $s_i(E)$ là lớp Segre thứ i của phân thớ vectơ E.

Bằng cách sử dụng các kết quả cơ bản của hàm Schur, von Bothmer-Ranestad trong [11] đã chỉ ra công thức tổng quát cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định dưới dạng tổng của các hàm theo các dãy con của tập $\{1,\ldots,n\}$.

Đặt

$$\psi_i = 2^{i-1}, \psi_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1}\binom{i+j-2}{k} \text{ khi } i<j,$$

$$\psi_{i_1,\ldots,i_r} = \begin{cases} Pf(\psi_{i_s,i_t})_{1\le s<t\le r} & \text{nếu } r \text{ chẵn}\\ Pf(\psi_{i_s,i_t})_{0\le s<t\le r} & \text{nếu } r \text{ lẻ}\end{cases}$$

trong đó $\psi_{i_0,i_k} = \psi_{i_k}$ và Pf ký hiệu là Pfaffian của ma trận phản đối xứng.

Định lý 4.3.2 ([11, Định lý 1.1])**.** *Bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định được xác định bởi công thức sau:*

$$\delta(m,n,r) = \sum_I \psi_I\psi_{I^c},$$

trong đó tổng trên chạy trên khắp các dãy con tăng ngặt $I = \{i_1,\ldots,i_{n-r}\}$ của $\{1,\ldots,n\}$ với chiều dài $n-r$, $i_1+\ldots+i_{n-r} = m$ và $I^c = \{1,\ldots,n\}\setminus I$.

Ví dụ 4.3.1 ([11, Ví dụ 4.2])**.** Tính $\delta(m,n,r)$ khi $n=5$.

I	1	2	3	4	5
ψ_I	1	2	4	8	16

I	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$	$2,3$	$2,4$	$2,5$	$3,4$	$3,5$	$4,5$
ψ_I	1	3	7	15	3	10	25	10	35	35

I	$1,2,3$	$1,2,4$	$1,2,5$	$1,3,4$	$1,3,5$	$1,4,5$	$2,3,4$	$2,3,5$	$2,4,5$	$3,4,5$
ψ_I	1	4	11	6	23	27	4	18	30	20

I	$1,2,3,4$	$1,2,3,5$	$1,2,4,5$	$1,3,4,5$	$2,3,4,5$
ψ_I	1	5	10	10	5

Vì vậy, chúng ta có:

$$\delta(1,5,4) = \psi_1\psi_{2,3,4,5} = 5,$$
$$\delta(2,5,4) = \psi_2\psi_{1,3,4,5} = 20,$$
$$\delta(3,5,4) = \psi_3\psi_{1,2,4,5} = 40,$$
$$\delta(4,5,4) = \psi_4\psi_{1,2,3,5} = 40,$$
$$\delta(5,5,4) = \psi_5\psi_{1,2,3,4} = 16,$$
$$\delta(4,5,3) = \psi_{1,3}\psi_{2,4,5} = 90,$$
$$\delta(5,5,3) = \psi_{1,4}\psi_{2,3,5} + \psi_{2,3}\psi_{1,4,5} = 7 \cdot 18 + 2 \cdot 27 = 207,$$
$$\delta(6,5,3) = \psi_{1,5}\psi_{2,3,4} + \psi_{2,4}\psi_{1,3,5} = 15 \cdot 4 + 10 \cdot 23 = 290,$$
$$\delta(7,5,3) = \psi_{2,5}\psi_{1,3,4} + \psi_{3,4}\psi_{1,2,5} = 25 \cdot 6 + 10 \cdot 11 = 260,$$
$$\delta(8,5,3) = \psi_{3,5}\psi_{1,2,4} = 140; \quad \delta(9,5,3) = \psi_{4,5}\psi_{1,2,3} = 35.$$

4.4 Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định

Từ kết quả của von Bothmer-Ranestad, bằng cách sử dụng các đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng kép và kỹ thuật địa phương hóa trong lý thuyết giao đẳng biến, một công thức khác tính bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định được chỉ ra bởi Hiep [32]. Trong phần này, chúng tôi trình bày lại kết quả của Hiep [32] và chứng minh chi tiết, vì phương pháp chứng minh của kết quả này được áp dụng ở phần sau.

Với bộ ba số (m,n,r) thỏa mãn bất đẳng thức Pataki (4.1.2), để thuận tiện trong việc trình bày công thức ta đặt:

$$u = m - \binom{n-r+1}{2} \text{ và } v = \binom{n+1}{2} - m - \binom{r+1}{2}.$$

Trên vành đa thức $\mathbb{Q}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$, với mỗi tập con I chứa r phần tử của tập $\{1,\dots,n\}$, chúng ta định nghĩa:

$$A_{v,I} = \det \begin{pmatrix} e_1(\Lambda_I) & e_2(\Lambda_I) & e_3(\Lambda_I) & \dots & e_v(\Lambda_I) \\ 1 & e_1(\Lambda_I) & e_2(\Lambda_I) & \dots & e_{v-1}(\Lambda_I) \\ 0 & 1 & e_1(\Lambda_I) & \dots & e_{v-3}(\Lambda_I) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_1(\Lambda_I) \end{pmatrix}_{v\times v},$$

trong đó $e_i(\Lambda_I)$ là đa thức đối xứng cơ bản thứ i theo $\binom{r+1}{2}$ biến là các phần tử của tập

$$\Lambda_I := \left\{\lambda_i + \lambda_j \mid i, j \in I, i \le j\right\},$$

và

$$T_I = \prod_{i\in I}\prod_{j\notin I}(\lambda_j - \lambda_i).$$

Chú ý rằng $A_{0,I} = 1$ với mọi I.

Định lý 4.4.1 ([32, Định lý 1])**.** *Bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định được xác định bởi công thức sau:*

$$\delta(m,n,r) = (-1)^v \sum_I \frac{A_{u,I^c}A_{v,I}}{T_I}, \tag{4.12}$$

trong đó tổng trên chạy trên khắp các dãy con I tăng ngặt chứa r phần tử của $\{1,\dots,n\}$, $I^c = \{1,\dots,n\} \setminus I$.

Chứng minh. Xét tác động của xuyến $T = (\mathbb{C}^*)^n$ lên $\mathbb{C}^n$ được cho bởi công thức theo các tọa độ

$$(a_1,\dots,a_n)\cdot(x_1,\dots,x_n) = (a_1x_1,\dots,a_nx_n).$$

Điều này cảm sinh một tác động xuyến T lên đa tạp Grassmann $G(r,n)$ với $\binom{n}{r}$ điểm cố định cô lập L_I tương ứng với $\binom{n}{r}$ phẳng tọa độ $r-$chiều trong $\mathbb{C}^n$.

Áp dụng công thức Atiyah-Bott- Berline-Vergne (1.1) vào công thức tính bậc đại số (4.11) của von Bothmer-Ranestad, ta có

$$\delta(m,n,r) = \sum_I \frac{s_u^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{Q}|_{L_I})s_v^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I})}{e_{L_I}},$$

trong đó tổng trên chạy trên khắp các dãy con I chứa r phần tử của $\{1,\dots,n\}$.

Tại mỗi L_I, tác động xuyến trên các phân thớ $\mathcal{S}|_{L_I}$ và $\mathcal{Q}|_{L_I}$ có đặc trưng lần lượt là ρ_i với $i \in I$ và ρ_j với $j \in I^c$. Vì phân thớ tiếp xúc trên đa tạp Grassmann đẳng cấu với $\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{Q}$ nên các đặc trưng của tác động xuyến trên không gian tiếp xúc tại L_I là

$$\{\rho_j - \rho_i \mid i \in I, j \in I^c\}.$$

Lớp T-Euler đẳng biến của phân thớ tiếp xúc tại L_I là

$$e_{L_I} = \prod_{i\in I}\prod_{j\notin I}(\lambda_j - \lambda_i) = T_I.$$

Vì các đặc trưng của tác động xuyến trên $\mathcal{S}^*|_{L_I}$ là $-\rho_i$ với $i \in I$ nên tác động xuyến trên $\mathrm{Sym}^2\mathcal{S}^*|_{L_I}$ có các đặc trưng là

$$\left\{-(\rho_i + \rho_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq r\right\}.$$

Vì vậy $c_i^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I})$ là đa thức đối xứng cơ bản theo $\binom{r+1}{2}$ biến, với biến là các phần tử của tập

$$\left\{-(\lambda_i + \lambda_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq r\right\}.$$

Nghĩa là, $c_i^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) = (-1)^i e_i(\Lambda_I)$ với mọi i. Vì vậy

$$s_v^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) = \det\begin{pmatrix} c_1^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) & c_2^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) & \dots & c_v^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) \\ 1 & c_1^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) & \dots & {c_{v-1}}^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) \\ 0 & 1 & \dots & {c_{v-2}}^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_1^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{S}^*|_{L_I}) \end{pmatrix}_{v\times v}$$

$$= (-1)^v\det\begin{pmatrix} e_1(\Lambda_I) & e_2(\Lambda_I) & \dots & e_v(\Lambda_I) \\ 1 & e_1(\Lambda_I) & \dots & e_{v-1}(\Lambda_I) \\ 0 & 1 & \dots & e_{v-2}(\Lambda_I) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_1(\Lambda_I) \end{pmatrix}_{v\times v} = (-1)^v A_{v,I}.$$

Tương tự, vì các đặc trưng của tác động xuyến trên $\mathcal{Q}|_{L_I}$ là ρ_i với mọi $i \in I^c$ nên tác động xuyến trên $\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{Q}|_{L_I}$ có các đặc trưng là

$$\left\{(\rho_i + \rho_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq r\right\}.$$

Vì vậy, $c_i^T(\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{Q}|_{L_I})$ là đa thức đối xứng cơ bản theo $\binom{n-r+1}{2}$ biến, với các biến là các phần tử của tập

$$\Lambda_{I^c} := \left\{\lambda_i + \lambda_j \mid i, j \in I^c, i \leq j\right\}.$$

Nghĩa là, $c_i^T(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{S}^*|_{L_I}) = e_i(\Lambda_{I^c})$ với mọi i. Vì vậy

$$s_v^T(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{S}^*|_{L_I}) = \det \begin{pmatrix} c_1^T(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{Q}|_{L_I}) & c_2^T(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{Q}|_{L_I}) & \dots & c_u^T(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{Q}|_{L_I}) \\ 1 & c_1^T(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{Q}|_{L_I}) & \dots & {c_{u-1}}^T \mathrm{Sym}^2 \mathcal{Q}|_{L_I}) \\ 0 & 1 & \dots & {c_{u-2}}^T(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{Q}|_{L_I}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_1^T(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{Q}|_{L_I}) \end{pmatrix}_{u\times u}$$

$$= \det \begin{pmatrix} e_1(\Lambda_{I^c}) & e_2(\Lambda_{I^c}) & \dots & e_u(\Lambda_{I^c}) \\ 1 & e_1(\Lambda_{I^c}) & \dots & e_{u-1}(\Lambda_{I^c}) \\ 0 & 1 & \dots & e_{u-2}(\Lambda_{I^c}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_1(\Lambda_{I^c}) \end{pmatrix}_{u\times u} = A_{u,I^c}.$$

Như vậy ta có được kết quả mong đợi. □

Vế phải của công thức (4.12) là một hàm phân thức đối xứng và nó là một hàm hằng, hơn nữa nó là một số nguyên.

4.5 Đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng kép

Trong phần này, chúng tôi đề cập đến một đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng kép được chỉ ra bởi Hiep [33], vì sự cần thiết của kết quả này trong chứng minh ở phần sau.

Để thuận tiện cho phần trình bày công thức, ta sẽ sử dụng ký hiệu $[n]$ thay cho tập $\{1, \dots, n\}$. Với mỗi tập con $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset [n]$ thì đặt $\lambda_I = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r})$ và $I^c = [n] \backslash I$.

Định lý 4.5.1 ([33, Định lý 1.2])**.** *Cho*

$$P(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}]$$

là một đa thức đối xứng kép có bậc không lớn hơn $r(n-r)$. Khi đó

$$\sum_{I\subset[n],\#I=r} \frac{P(\lambda_I, \lambda_{I^c})}{\prod_{i\in I, j\in I^c}(\lambda_i - \lambda_j)} = \frac{d(r,n)}{r!(n-r)!},$$

trong đó $d(r,n)$ *là hệ số của đơn thức* $x_1^{n-1}\cdots x_r^{n-1}y_1^{n-1}\cdots y_{n-r}^{n-1}$ *trong khai triển của đa thức*

$$P(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-r})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)\prod_{j\neq i}(y_i-y_j)\prod_{i=1}^{n-k}\prod_{j=1}^{r}(y_i-x_j).$$

Trong [33], kết quả của Định lý 4.5.1 được trình bày nhưng phần chứng minh đã bị bỏ qua vì tác giả cho rằng chứng minh của định lý này sẽ được thực hiện tương tự như cách chứng minh của Định lý 2.3.1. Ở đây, chúng tôi chứng minh Định lý này bằng cách sử dụng một lập luận hiệu quả được lấy cảm hứng từ kết quả của Don Zagier trong [25, Mệnh đề A.1] hoặc [35, Bổ đề 2].

Để chứng minh Định lý 4.5.1, đầu tiên ta chứng minh Bổ đề sau.

Bổ đề 4.5.1. *Cho* $Q_1(x),\dots,Q_n(x)$ *lần lượt là các đa thức có bậc tương ứng là* $d_1+1,\dots,d_n+1$ *với hệ số cao nhất bằng 1 và có các nghiệm phân biệt. Lấy* $F(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-r})\in\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-r}]$ *là một đa thức theo* n *biến với bậc không lớn hơn* $d_1+\cdots+d_n$. *Khi đó, biểu thức*

$$\sum_{Q_1(\alpha_1)=\cdots=Q_n(\alpha_n)=0}\frac{F(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}{Q_1'(\alpha_1)\cdots Q_n'(\alpha_n)}\tag{4.13}$$

là độc lập với các đa thức Q_i *và bằng với hệ số của đơn thức* $x_1^{d_1}\cdots x_r^{d_r}y_1^{d_{r+1}}\cdots y_{n-r}^{d_n}$ *trong* $F(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-r})$.

Chứng minh. Do tính chất tuyến tính, chúng ta chỉ cần xét đơn thức

$$F(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-r})=x_1^{a_1}\cdots x_r^{a_r}y_1^{a_{r+1}}\cdots y_{n-r}^{a_n},$$

trong đó $a_1+\cdots+a_n\le d_1+\cdots+d_n$. Biểu thức (4.13) được phân tích như sau

$$\Bigg(\sum_{Q_1(\alpha_1)=0}\frac{\alpha_1^{a_1}}{Q_1'(\alpha_1)}\Bigg)\cdots\Bigg(\sum_{Q_n(\alpha_n)=0}\frac{\alpha_n^{a_n}}{Q_n'(\alpha_n)}\Bigg).$$

Với mọi $i\in[n]$, giả sử rằng $\gamma_{i0},\gamma_{i1},\dots,\gamma_{id_i}$ là d_i+1 nghiệm phân biệt của $Q_i(x)$, khi đó

$$\sum_{Q_i(\alpha_i)=0}\frac{\alpha_i^{a_i}}{Q_i'(\alpha_i)}=\sum_{j=0}^{d_i}\frac{\gamma_{ij}^{a_i}}{\prod_{k\neq j}(\gamma_{ij}-\gamma_{ik})}.$$

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho x^{a_i} tại $\gamma_{i0},\gamma_{i1},\dots,\gamma_{id_i}$, ta có

$$x^{a_i}=\sum_{j=0}^{d_i}\frac{\gamma_{ij}^{a_i}\prod_{k\neq j}(x-\gamma_{ik})}{\prod_{k\neq j}(\gamma_{ij}-\gamma_{ik})}.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{j=0}^{d_i} \frac{\gamma_{ij}^{a_i}}{\prod_{k\neq j}(\gamma_{ij}-\gamma_{ik})} = \text{ hệ số của } x^{d_i} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 \leq a_i < d_i, \\ 1 & \text{if} \quad a_i = d_i. \end{cases}$$

Vì vậy, nếu $a_i = d_i$ với mọi i thì biểu thức trên sẽ bằng 1, trong các trường hợp còn lại thì biểu thức trên bằng 0. Như vậy Bổ đề đã được chứng minh. □

Chú ý 4.5.1. Như đã trình bày ở Mục 2.3, chúng tôi sẽ cung cấp thêm một chứng minh khác cho Định lý 2.3.1 bằng cách sử dụng kết quả của Bổ đề 4.5.1, cụ thể như sau:

Áp dụng Bổ đề 4.5.1 cho các đa thức sau đây

$$F(x_1,\dots,x_k) = P(x_1,\dots,x_k)\prod_{i\neq j}(x_i-x_j),$$

$$Q_1(x) = \cdots = Q_k(x) = Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i).$$

Thật vậy, ta có $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ là n nghiệm phân biệt của $Q(x)$ và đạo hàm

$$Q'(x) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j).$$

Suy ra

$$Q'(\lambda_i) = \prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j).$$

Với mỗi tập $I = \{i_1,\dots,i_k\}$, ta có $F(\lambda_I) = 0$ nếu có $i_s = i_t$ với $s \neq t$. Vì F là đa thức đối xứng, nên biểu thức (4.13) trở thành

$$k! \sum_{I\subset[n],|I|=k} \frac{F(\lambda_I)}{\prod\limits_{i\in I, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}. \tag{4.14}$$

Với mỗi $I \subset [n]$, ta có

$$F(\lambda_I) = P(\lambda_I)\prod_{i,j\in I, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j),$$

và

$$\prod_{i\in I, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j) = \prod_{i\in I, j\in I^c}(\lambda_i-\lambda_j)\prod_{i,j\in I, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j).$$

Do vậy, biểu thức (4.14) trở thành

$$k! \sum_{I\subset[n],|I|=k} \frac{P(\lambda_I)}{\prod\limits_{i\in I, j\in I^c} (\lambda_i - \lambda_j)}. \tag{4.15}$$

Bổ đề 4.5.1 chỉ ra rằng biểu thức (4.15) chính là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}\cdots x_k^{n-1}$ trong đa thức

$$P(x_1,\ldots,x_k)\prod_{i\neq j}(x_i-x_j).$$

Chứng minh Định lý 4.5.1. Áp dụng Bổ đề 4.5.1 cho các đa thức sau

$$F(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_{n-r}) = P(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_{n-r})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)\prod_{j\neq i}(y_i-y_j)\prod_{i=1}^{n-r}\prod_{j=1}^{r}(y_i-x_j)$$

và

$$Q_1(x) = \cdots = Q_n(x) = Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i).$$

Theo giả thiết, $F(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_{n-r})$ là một đa thức có bậc không lớn hơn $n(n-1)$ và $Q(x)$ là một đơn thức bậc n với n nghiệm phân biệt $\lambda_1\ldots,\lambda_n$. Trong trường hợp này, biểu thức (4.13) có thể rút gọn như sau

$$r!(n-r)! \sum_{I\subset[n],\#I=r} \frac{F(\lambda_I,\lambda_{I^c})}{\prod_{i=1}^{n} Q'(\lambda_i).} \tag{4.16}$$

Với mọi $I\subset[n], \#I=r$, chúng ta có

$$\begin{aligned} F(\lambda_I,\lambda_{I^c}) &= P(\lambda_I,\lambda_{I^c}) \prod_{i,j\in I, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j) \prod_{i,j\in I^c, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j) \prod_{i\in I^c, j\in I}(\lambda_i-\lambda_j) \\ &= P(\lambda_I,\lambda_{I^c}) \prod_{i,j\in I, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j) \prod_{i\in I^c, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j). \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} Q'(\lambda_i) &= \prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j) \\ &= \prod_{i\in I, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j) \prod_{i\in I^c, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j) \\ &= \prod_{i\in I, j\in I^c}(\lambda_i-\lambda_j) \prod_{i,j\in I, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j) \prod_{i\in I^c, j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j). \end{aligned}$$

Khi đó biểu thức (4.16) có thể viết như sau

$$r!(n-r)! \sum_{I\subset[n],\#I=r} \frac{P(\lambda_I,\lambda_{I^c})}{\prod_{i\in I, j\in I^c}(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

4.6 Một đặc trưng mới cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định

Bắt đầu từ mối liên hệ của bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định với số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann đưa ra bởi von Bothmer-Ranestad [11]. Sử dụng kết quả về bậc đại số được chỉ ra bởi Hiep trong [32] cùng với kết quả của đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng kép [33], chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số trong quy hoạch nửa dưới dạng hệ số của một đơn thức đặc biệt trong khai triển của một đa thức đối xứng kép.

Với bộ ba số (m, n, r) thỏa mãn bất đẳng thức Pataki (4.1.2), để thuận tiện trong việc trình bày công thức ta đặt:

$$u = m - \binom{n-r+1}{2} \text{ và } v = \binom{n+1}{2} - m - \binom{r+1}{2}.$$

Trên vành đa thức $Q[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r}]$ với n biến. Chúng ta xét các tập sau:

$$\mathcal{X} := \left\{x_i + x_j \mid 1 \le i \le j \le r\right\}, \tag{4.17}$$

và

$$\mathcal{Y} := \left\{y_i + y_j \mid 1 \le i \le j \le n-r\right\}, \tag{4.18}$$

Rõ ràng rằng, lực lượng của tập $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ lần lượt là $\binom{r+1}{2}$ và $\binom{n-r+1}{2}$.

Định lý 4.6.1. *Bậc đại số $\delta(m, n, r)$ trong quy hoạch nửa xác định được cho bởi công thức sau:*

$$\delta(m, n, r) = (-1)^v \frac{c(m, n, r)}{r!(n-r)!}, \tag{4.19}$$

trong đó $c(m, n, r)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1} \cdots x_r^{n-1} y_1^{n-1} \cdots y_{n-r}^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$h_v(\mathcal{X}) h_u(\mathcal{Y}) \prod_{j \ne i} (x_i - x_j) \prod_{j \ne i} (y_i - y_j) \prod_{i=1}^{n-r} \prod_{j=1}^{r} (y_i - x_j),$$

ở đây $h_u(\mathcal{X})$ là đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ thứ u theo $\binom{r+1}{2}$ biến với các biến là các phần tử của tập $\mathcal{X}$ và $h_v(\mathcal{Y})$ là đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ thứ v theo $\binom{n-r+1}{2}$ biến với các biến là các phần tử của tập $\mathcal{Y}$.

Chứng minh. Áp dụng công thức Atiyah-Bott- Berline-Vergne (1.1) vào công thức tính bậc đại số (4.11) của von Bothmer-Ranestad. Hiep [32, Định lý 1] đã chỉ ra rằng

$$\delta(m,n,r) = (-1)^v \sum_{I\subset[n],\#I=r} \frac{A_{v,I}A_{u,I^c}}{T_I}, \tag{4.20}$$

trong đó

$$T_I = (-1)^{r(n-r)} \prod_{i\in I, j\in I^c} (x_i - x_j),$$

$$A_{v,I} = \det \begin{pmatrix} e_1(\Lambda_I) & e_2(\Lambda_I) & e_3(\Lambda_I) & \dots & e_v(\Lambda_I) \\ 1 & e_1(\Lambda_I) & e_2(\Lambda_I) & \dots & e_{v-1}(\Lambda_I) \\ 0 & 1 & e_1(\Lambda_I) & \dots & e_{v-3}(\Lambda_I) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_1(\Lambda_I) \end{pmatrix}_{v\times v},$$

$$A_{u,I^c} = \det \begin{pmatrix} e_1(\Lambda_{I^c}) & e_2(\Lambda_{I^c}) & e_3(\Lambda_{I^c}) & \dots & e_u(\Lambda_{I^c}) \\ 1 & e_1(\Lambda_{I^c}) & e_2(\Lambda_{I^c}) & \dots & e_{u-1}(\Lambda_{I^c}) \\ 0 & 1 & e_1(\Lambda_{I^c}) & \dots & e_{u-3}(\Lambda_{I^c}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_1(\Lambda_{I^c}) \end{pmatrix}_{u\times u},$$

với $e_i(\Lambda_I)$ là đa thức đối xứng cơ bản thứ i với các biến là các phần tử của tập

$$\Lambda_I = \{\lambda_i + \lambda_j \mid i,j \in I, i \le j\},$$

và $e_i(\Lambda_{I^c})$ là đa thức đối xứng cơ bản thứ i với các biến là các phần tử của tập

$$\Lambda_{I^c} = \{\lambda_i + \lambda_j \mid i,j \in I^c, i \le j\}.$$

Theo đồng nhất thức của Jacobi–Trudi (1.4.2), chúng ta có

$$h_v(\Lambda_I) = A_{v,I} \text{ và } h_u(\Lambda_{I^c}) = A_{u,I^c}.$$

Vì vậy, theo công thức (4.20), chúng thu được kết quả

$$\delta(m,n,r) = (-1)^v \sum_{I\subset[n],\#I=r} \frac{h_v(\Lambda_I)h_u(\Lambda_I^c)}{\prod_{i\in I,j\in I^c}(\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Áp dụng Định lý 4.5.1, chúng ta thu được kết quả mong đợi. □

Ví dụ 4.6.1. Tính bậc đại số $\delta(m,n,r)$ với $n=3, m=2, r=2$.
Ta có

$$h_1(\mathcal{X}) = (2x_1) + (x_1 + x_2) + 2x_2 = 3(x_1 + x_2) \text{ và } h_1(\mathcal{Y}) = 2y_1.$$

Đa thức

$$h_1(\mathcal{X})h_1(\mathcal{Y})\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)\prod_{j\neq i}(y_i - y_j)\prod_{i=1}^{n-r}\prod_{j=1}^{r}(y_i - x_j)$$
$$= 3(x_1 + x_2)2y_1(x_1 - x_2)(x_2 - x_1)(y_1 - x_1)(y_1 - x_2)$$
$$= -6(x_1^3 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_2^3)(y_1^3 - y_1^2x_2 - x_1y_1^2 + x_1x_2y_1).$$

Sau khi khai triển đa thức trên ta thu được hệ số của đơn thức $x_1^2x_2^2y_1^2$bằng -12. Do đó

$$\delta(2, 3, 2) = (-1)^1\frac{c(2, 3, 2)}{2!1!} = 6.$$

Chú ý rằng, kết quả của Định lý 4.6.1 cung cấp một phương pháp tổ hợp để tính các bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định.

4.7 Một số kết quả của đa thức đối xứng

Đầu tiên, chúng tôi chứng minh hai bổ đề dưới đây vì chúng rất cần thiết trong chứng minh các kết quả của các phần sau.

Để thuận tiện trong việc trình bày công thức, chúng ta sử dụng các ký hiệu sau: Ký hiệu $[n]$ thay cho tập $\{1, \ldots, n\}$ và ký hiệu $[[n]]$ thay cho tập $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Ký hiệu $\mathcal{S}_r$ là nhóm đối xứng của tập $[r]$, mỗi phần tử $\sigma \in \mathcal{S}_r$ là một hoán vị của tập $[r]$. Hàm dấu của một hoán vị $\sigma \in \mathcal{S}_r$ được định nghĩa bởi

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ là chẵn,} \\ -1, & \sigma \text{ là lẻ .} \end{cases}$$

Khi cho $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ là phân hoạch của số nguyên dương d có chiều dài r thì ta sẽ viết $\lambda = (k^{\alpha_k}, \ldots, 2^{\alpha_2}, 1^{\alpha_1})$, với α_i là số lần i xuất hiện trong phân hoạch. Chú ý rằng $\sum_{i=1}^{k} i\alpha_i = d$.

Bổ đề 4.7.1. *Cho λ là một phân hoạch với độ dài $l(\lambda) \leq r$. Cho n là một số nguyên dương sao cho $n > r$. Khi đó, hệ số của đơn thức $x_1^{n-1} \cdots x_r^{n-1}$ trong đa thức*

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_r)\prod_{j\neq i}(x_i - x_j) \tag{4.21}$$

bằng $r!$ nếu $\lambda = ((n - r)^r)$ và bằng 0 nếu $\lambda \neq ((n - r)^r)$.

Chứng minh. Đầu tiên chúng ta chứng minh nếu $\lambda \neq ((n-r)^r)$ thì đa thức (4.21) không có đơn thức $x_1^{n-1}\cdots x_r^{n-1}$ trong khai triển của nó.
Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
s_\lambda(x_1,\ldots,x_r)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j) &= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} a_{\lambda+\delta_r}(x_1,\ldots,x_r)a_{\delta_r}(x_1,\ldots,x_r)\\
&= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \det(x_i^{\lambda_j+r-j})_{r\times r}\det(x_i^{r-j})_{r\times r}\\
&= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r}\operatorname{sgn}(\sigma)x^{\sigma(\lambda+\delta_r)}\right)\left(\sum_{\theta\in\mathcal{S}_r}\operatorname{sgn}(\theta)x^{\theta(\delta_r)}\right)\\
&= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \left(\sum_{\sigma,\theta\in\mathcal{S}_r}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\theta)x^{\sigma(\lambda+\delta_r)+\theta(\delta_r)}\right).
\end{aligned}$$

Giả sử rằng $x_1^{n-1}\cdots x_r^{n-1}$ là một số hạng của đa thức (4.21), khi đó tồn tại một phân hoạch $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ sao cho $\sigma(\lambda+\delta_r)+\theta(\delta_r)=((n-1)^r)$ với $\sigma,\theta\in\mathcal{S}_r$ nào đó. Vì $\delta_r=(r-1,r-2,\ldots,1,0)$ nên $\sigma(\lambda+\delta_r)$ là một hoán vị của tập $\{n-r,\ldots,n-1\}$. Vì vậy, số hạng lớn nhất (tương ứng nhỏ nhất) trong $\sigma(\lambda+\delta_r)$ phải là $n-1$ (tương ứng $n-r$). Do đó, $\lambda_1=n-r$ và $\lambda_r=n-r$. Vì vậy, $\lambda=((n-r)^r)$, điều này mâu thuẫn.

Bây giờ, chúng ta giả sử rằng $\lambda=((n-r)^r)$. Rõ ràng

$$\begin{aligned}
s_{((n-r)^r)}(x_1,\ldots,x_r)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j) &= e_r^{n-r}(x_1,\ldots,x_r)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)\\
&= \prod_{i=1}^{r}x_i^{n-r}\prod_{j\neq i}(x_i-x_j).
\end{aligned}$$

Điều này cho thấy hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}\cdots x_r^{n-1}$ trong đa thức (4.21) tương ứng với $\lambda=((n-r)^r)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{r-1}\cdots x_r^{r-1}$ trong $\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$. Hơn nữa, trong [56] đã chỉ ra rằng $r!$ là hệ số của đơn thức $x_1^{r-1}\cdots x_r^{r-1}$ trong $\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$. $\square$

Xét ma trận tam giác Pascal vô hạn

$$P=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots\\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \ldots\\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \ldots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix},$$

trong đó $P_{ij} = \binom{i}{j}$.

Với mỗi cặp của các tập con hữu hạn $I, J \subset \mathbb{N}$, ký hiệu M_{IJ} là ma trận con của ma trận P với các hàng lấy chỉ số trong I và các cột lấy chỉ số trong J.

Với mỗi tập con hữu hạn $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \mathbb{N}$, ký hiệu

$$\psi_I = \sum_{J \subset \mathbb{N}, \# J = r} \det(M_{I,J}), \tag{4.22}$$

và

$$\lambda(I) = (i_r - (r-1), i_{r-1} - (r-2), \ldots, i_1). \tag{4.23}$$

Bổ đề sau là hệ quả của Bổ đề A.15 trong [39].

Bổ đề 4.7.2. *Cho $\mathcal{X}$ là một tập được xác định như trong (4.17) và d một số nguyên dương. Khi đó, ta có*

$$h_d(\mathcal{X}) = \sum_{I \subset \mathbb{N}, \# I = r, |\lambda(I)| = d} \psi_I s_{\lambda(I)}(x_1, \ldots, x_r). \tag{4.24}$$

Ví dụ 4.7.1. Với $d = 2$ và $r = 2$, ta có:

$$\begin{aligned} h_2(2x_1, x_1 + x_2, 2x_2) &= 7x_1^2 + 10x_1x_2 + 7x_2^2 \\ &= 7s_{(2)} + 3s_{(1^2)}. \end{aligned}$$

Bổ đề 4.7.3 (Đồng nhất thức hockey-sick)**.** *Với $n, r \in \mathbb{N}, n \leq n$, ta có:*

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Chứng minh. Bổ đề dễ dàng được chứng minh bằng phương pháp quy nạp. □

Sử dụng Bổ đề 4.7.1, Bổ đề 4.7.2 và Bổ đề 4.7.3, chúng ta chứng minh hai mệnh đề dưới đây vì sự cần thiết của chúng cho các chứng minh ở phần sau.

Mệnh đề 4.7.1. *Cho $\mathcal{X}$ là tập được xác định như trong (4.17). Khi đó, hệ số của đơn thức $x_1^r \cdots x_r^r$ khai triển của trong khai triển của đa thức*

$$e_k(x_1, \ldots, x_r) h_{r-k}(\mathcal{X}) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \tag{4.25}$$

là $\binom{r+1}{k+1} r!$.

Chứng minh. Đặt $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
e_k(x)h_{r-k}(\mathcal{X}) &= e_k(x) \sum_{I \subset \mathbb{N}, \#I = r, |\lambda(I)| = r-k} \psi_I s_{\lambda(I)}(x) \\
&= \sum_{I \subset \mathbb{N}, \#I = r, |\lambda(I)| = r-k} \psi_I \big(s_{\lambda(I)}(x) e_k(x) \big) \\
&\overset{\text{công thức Pieri}}{=} \sum_{I \subset \mathbb{N}, \#I = r, |\lambda(I)| = r-k} \psi_I \bigg(\sum_{\gamma} s_\gamma(x) \bigg).
\end{aligned}$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 4.7.1, chúng ta có hệ số của đơn thức $x_1^r \cdots x_r^r$ trong đa thức (4.25) phải là $\psi_I r!$ với $I = [[r]] \setminus \{k\} = \{0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, r-1, r\}$. Chúng ta cần chứng minh

$$\psi_I = \binom{r+1}{k+1}.$$

Rõ ràng, trong biểu diễn (4.22), I thu được bằng cách thay đổi các phần tử từ tập $[[r]]$, khi đó tập J là tập con của $[[r]]$ làm $\det(M_{I,J}) \neq 0$, ngược lại $\det(M_{I,J}) = 0$. Đặc biệt, chúng ta có $I = [[r]] \setminus \{k\}$ và

$$\begin{cases}
\text{nếu } J \subseteq [[r]], \text{ thì } \det(M_{I,J}) = 0, \\
\text{nếu } J = [[r]] \setminus \{a\} \text{ với } a < k \text{ thì } \det(M_{I,J}) = 0, \\
\text{nếu } J = [[r]] \setminus \{b\} \text{ với } b \geq k \text{ thì } \det(M_{I,J}) = \binom{b}{k}.
\end{cases}$$

Như vậy

$$\psi_I = \sum_{J \subset \mathbb{N}, \#J = r} \det(M_{I,J}) = \sum_{b=k}^{r} \binom{b}{k} = \binom{r+1}{k+1}.$$

Đẳng thức cuối cùng được suy ra vì đồng nhất thức hockey-stick. □

Mệnh đề 4.7.2. *Cho $\mathcal{X}$ là tập hợp được xác định như trong (4.17). Khi đó, hệ số của đơn thức $x_1^{r+1} \cdots x_r^{r+1}$ trong khai triển của đa thức*

$$e_k(x_1, \ldots, x_r) h_{2r-k}(\mathcal{X}) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \tag{4.26}$$

là $(k+1)\binom{r+3}{k+3} r!$.

Chứng minh. Đặt $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Ta có

$$\begin{aligned}
e_k(x)h_{2r-k}(\mathcal{X}) &= e_k(x) \sum_{I\subset\mathbb{N},\#I=r,|\lambda(I)|=2r-k} \psi_I s_{\lambda(I)}(x) \\
&= \sum_{I\subset\mathbb{N},\#I=r,|\lambda(I)|=2r-k} \psi_I \big(s_{\lambda(I)}(x)e_k(x)\big) \\
&\overset{\text{công thức Pieri}}{=} \sum_{I\subset\mathbb{N},\#I=r,|\lambda(I)|=2r-k} \psi_I \bigg(\sum_{\gamma} s_\gamma(x)\bigg).
\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 4.7.1, hệ số của đơn thức $x_1^{r+1} \cdots x_r^{r+1}$ trong khai triển của đa thức (4.26) phải là $\psi_I r!$ với $\lambda(I) = (2^{r-k}, 1^k)$, nghĩa là

$$I = (1, \ldots, k, k+2, \ldots, r+1).$$

Với mọi $J = [[r+1]] \setminus \{i, j\}$ với $0 \le i < j \le r+1$, ta có

$$\det(M_{I,J}) = \binom{j}{k+1} - \binom{i}{k+1}.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
\psi_I &= \sum_{J\subset\mathbb{N},\#I=r} \det(M_{I,J}) \\
&= \sum_{0\le i<j\le r+1} \left(\binom{j}{k+1} - \binom{i}{k+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{r+1}\sum_{i=0}^{j-1} \left(\binom{j}{k+1} - \binom{i}{k+1}\right) \\
&= (k+1)\sum_{j=1}^{r+1} \binom{j+1}{k+2} \\
&= (k+1)\binom{r+3}{k+3}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cũng được suy ra vì đồng nhất thức hockey-stick. □

4.8 Một số ví dụ và áp dụng

Áp dụng Định lý 4.6.1, Mệnh đề 4.7.1 và Mệnh đề 4.7.2, chúng tôi sẽ chứng minh những kết quả được dự đoán bởi Nie, Ranestad và Sturmfels [44].

Mệnh đề 4.8.1. *Bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định thỏa mãn quan hệ đối ngẫu*

$$\delta(m,n,r) = \delta\left(\binom{n+1}{2} - m, n, n-r\right). \tag{4.27}$$

Chứng minh. Theo Định lý 4.6.1, chúng ta có

$$\delta\left(\frac{(n+1)n}{2} - m, n, n-r\right) = (-1)^v \frac{c\left(\binom{n+1}{2} - m, n, n-r\right)}{r!(n-r)!},$$

trong đó $c\left(\binom{n+1}{2} - m, n, n-r\right)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}\cdots x_{n-r}^{n-1}y_1^{n-1}\cdots y_r^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$h_v(\mathcal{X})h_u(\mathcal{Y})\prod_{j\neq i}^{r}(x_i - x_j)\prod_{j\neq i}^{n-r}(y_i - y_j)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n-r}(y_i - x_j).$$

Chú ý rằng

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n-r}(x_i - y_j) = (-1)^{r(n-r)}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n-r}(y_j - x_i),$$

và

$$u + v = r(n-r).$$

Vì vậy, chúng ta có

$$c\left(\binom{n+1}{2} - m, n, n-r\right) = (-1)^{v+u}c(m,n,r).$$

Như vậy, mệnh đề đã được chứng minh. □

Mệnh đề 4.8.2. *Khi $r = n-1$, ta có:*

$$\delta(m,n,n-1) = 2^{m-1}\binom{n}{m}.$$

Chứng minh. Theo Định lý 4.6.1, ta có

$$\delta(m,n,n-1) = (-1)^{m-1}\frac{c(m,n,n-1)}{(n-1)!},$$

trong đó $c(m,n,n-1)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}^{n-1}y_1^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$h_{n-m}(\mathcal{X})h_{m-1}(2y_1)\prod_{j\neq i}^{n-1}(x_i-x_j)\prod_{i=1}^{n-1}(y_1-x_i) =$$

$$= h_{n-m}(\mathcal{X})(2y_1)^{m-1}\prod_{j\neq i}^{n-1}(x_i-x_j)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e_k(x_1,\ldots,x_{n-1})y_1^{n-1-k}\right)$$

$$= (-1)^{m-1}2^{m-1}e_{m-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})h_{n-m}(\mathcal{X})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)y_1^{n-1} + \text{ các số hạng}$$

$$\text{không chứa } y_1^{n-1}$$

$$= (-1)^{m-1}2^{m-1}\binom{n}{m}(n-1)!x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}^{n-1}y_1^{n-1} + \text{các số hạng khác.}$$

Đẳng thức cuối cùng thu được từ Mệnh đề 4.7.1 với $k = m-1$. □

Mệnh đề 4.8.3. *Khi $m = 3$ và $r = n-2$, ta có:*

$$\delta(3,n,n-2) = \binom{n+1}{3}.$$

Chứng minh. Theo Định lý 4.6.1, ta có

$$\delta(3,n,n-2) = \frac{c(3,n,n-2)}{(n-2)!2!},$$

trong đó $c(3,n,n-2)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}\cdots x_{n-2}^{n-1}y_1^{n-1}y_2^{n-1}$ trong đa thức sau

$$h_{2n-4}(\mathcal{X})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)(2y_1y_2-y_1^2-y_2^2)\prod_{i=1}^{n-2}(y_1-x_i)\prod_{i=1}^{n-2}(y_2-x_i)$$

$$= 2h_{2n-4}(\mathcal{X})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)y_1^{n-1}y_2^{n-1} + \text{các số hạng khác không chứa } y_1^{n-1}y_2^{n-1}.$$

$$= 2\binom{n+1}{3}(n-2)!x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}^{n-1}y_1^{n-1}y_2^{n-1} + \text{các số hạng khác.}$$

Đẳng thức cuối cùng thu được từ Mệnh đề 4.7.2 với $k = 0$. □

Mệnh đề 4.8.4. *Khi $m = 4$ và $r = n-2$, ta có:*

$$\delta(4,n,n-2) = 6\binom{n+1}{4}.$$

Chứng minh. Theo Định lý 4.6.1, ta có

$$\delta(4,n,n-2) = -\frac{c(4,n,n-2)}{(n-2)!2!}$$

trong đó $c(4, n, n-2)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1} \cdots x_{n-2}^{n-1} y_1^{n-1} y_2^{n-1}$ trong đa thức sau

$$
\begin{aligned}
& h_{2n-5}(\mathcal{X}) h_1(\mathcal{Y}) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)(2y_1 y_2 - y_1^2 - y_2^2) \prod_{i=1}^{n-2} (y_1 - x_i) \prod_{i=1}^{n-2} (y_2 - x_i) \\
& = h_{2n-5}(\mathcal{X}) h_1(\mathcal{Y}) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)(2y_1 y_2 - y_1^2 - y_2^2) \prod_{i=1}^{n-2} (y_1 - x_i) \prod_{i=1}^{n-2} (y_2 - x_i) \\
& = -6 e_1(x) h_{2n-5}(\mathcal{X}) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) y_1^{n-1} y_2^{n-1} + \text{ các số hạng không chứa } y_1^{n-1} y_2^{n-1}. \\
& = -12 \binom{n+1}{4} (n-2)! x_1^{n-1} \cdots x_{n-1}^{n-1} y_1^{n-1} y_2^{n-1} + \text{các số hạng khác.}
\end{aligned}
$$

Đẳng thức cuối cùng thu được từ Mệnh đề 4.7.2 với $k = 1$. $\square$

Kết luận

Luận án đã đạt được các kết quả sau đây:

1. Sử dụng những kết quả về đặc trưng số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann, chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ trong không gian xạ ảnh phức dưới dạng hệ số của một đơn thức đặc biệt trong khai triển của một đa thức đối xứng (xem Định lý 2.5.3). Kết quả này cung cấp một phương pháp tiếp cận tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano. Đặc biệt, trong trường hợp chiều của đa tạp Fano bằng 1, chúng tôi đã chỉ ra công thức liên hệ giữa giống và bậc cho đường cong Fano (xem Định lý 2.6.1).

2. Sử dụng các kỹ thuật tính toán của lý thuyết giao trên không gian xạ ảnh, chúng tôi tính đặc trưng Chern của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh và lớp Todd của phân thớ tiếp xúc trên không gian xạ ảnh (xem Mệnh đề 3.3.2 và Mệnh đề 3.4.1). Từ đó, chúng tôi chỉ ra một công thức tính đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh n - chiều (xem Định lý 3.5.2). Kết quả đạt được là cơ sở để tiếp tục nghiên cứu đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên đa tạp Grassmann.

3. Sử dụng những kết quả về số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann, chúng tôi đã đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Đặc trưng này cho phép biểu diễn bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định thông qua hệ số của một đơn thức đặc biệt trong khai triển của một đa thức đối xứng kép (xem Định lý 4.6.1). Sử dụng đặc trưng này, chúng tôi chứng minh lại các kết quả của Nie, Ranestad và Sturmfels theo một cách đơn giản hơn (xem các Mệnh đề 4.8.1, 4.8.2, 4.8.3, 4.8.4). Hơn nữa, chúng tôi cũng chỉ ra các kết quả thú vị liên quan đến các đa thức Schur, đa thức đối xứng sơ cấp và đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ (xem Mệnh đề 4.7.1 và Mệnh đề 4.7.2). Những kết quả này đóng góp thêm nhiều điều thú vị liên quan đến các lớp đa thức đối xứng cơ bản. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng cung cấp thêm một cách chứng minh độc lập cho Định lý 4.5.1 trong [33] từ cảm hứng của Don Zagier trong [25, Mệnh đề A.1].

Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Trên cơ sở kết quả đã đạt được của đề tài, chúng tôi đề xuất các hướng nghiên cứu tiếp theo trong thời gian tới bao gồm:

- Nghiên cứu bất biến Gromov–Witten với bậc cao hơn cho đa tạp Grassmann kiểu Lagrange.
- Nghiên cứu phiên bản K-lý thuyết của hệ số Littlewood–Richardson.
- Mô tả một thuật toán để tính toán đặc trưng Euler của các phân thớ Tango trên đa tạp Grassmann.

Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến Luận án

1. D. T. Hiep, N. C. Tu, N. T. M. Van (2019), A genus - degree formula for Fano varieties of linear subspaces on complete intersections, *Quy Nhon University Journal of Science*, 13, 91 - 97.

2. D. T. Hiep, N. T. M. Van (2020), A characterization for the degree of Fano varieties, *Quy Nhon University Journal of Science*, 14(3), 53 - 59.

3. N. H. Cong, D. T. Hiep, N.T. M. Van (2022), Euler characteristic of Tango bundles, *Da Lat University Journal of Science*, 12(2), 113 - 122.

4. D. T. Hiep, N. T. N. Giao, N. T. M. Van (2023), A characterization of the algebraic degree in semidefinite programming, *Collectanea Mathematica*, 74, 443 - 455.

Các kết quả của Luận án được thảo luận và báo cáo tại:

- Seminar Khoa Toán và Thống kê, Trường Đại học Quy Nhơn, Bình Định.
- Seminar Khoa Toán và Tin học, Trường Đại học Đà Lạt, Lâm Đồng.
- Hội nghị Đại số - Hình học - Tô pô, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, 21-23/10/2021.
- Hội thảo quốc tế "The 15th Mathematical Society of Japan-Seasonal Institute", thành phố YOKOHAMA, Nhật Bản, 20 - 25/11/2022.
- Hội thảo quốc tế “Singularities and Algebraic Geometry", Trường Đại học Khánh Hòa, 6 - 10/02/2023.
- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ 10, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà nẵng, 8 - 12/08/2023.

Tài liệu tham khảo

[1] F. Alizadeh, J. P. A. Haeberly, M. L. Overton (1997), Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming, *Mathematical Program*, 77(1), 111 - 128.

[2] André L. Meireles Araújo, Isreal Vainsencher (2001), *Equivariant intersection theory and Bott's residue formula*, Mat. Contemp, 20, 1–70

[3] G. E. Andrews (1976), *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley Publishing.

[4] A. B. Altman, S.L. Kleiman (1977), Foundations of the theory of Fano schemes, *Compositio Math*, 34, 3 - 47.

[5] Andreas Gathmann (2002), *Algebraic Geometry*, Notes for a class taught at the University of Kaiserslautern.

[6] M. F. Atiyah, R. H. Bott (1984), The moment map and equivariant cohomology, *Topology*, 23, 1 - 28.

[7] W. Barth, A. Van de Ven (1978), Fano varieties of lines on hypersurfaces, *Arch. Math (Basel)*, 31, 96 - 104.

[8] N. Berline, M. Vergne (1982), Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante. (French) [Equivariant characteristic classes. Localization formula in equivariant cohomology], *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 295(9), 539-541.

[9] R. Bott (1967), A residue formula for holomorphic vector-fields, *J. Differential Geom*, 1, 311 - 330.

[10] M. Brion (1998), Equivariant cohomology and equivariant intersection theory (notes by Alvaro Rittatore), in Representation Theories and Algebraic Geom-

etry (Montreal, PQ, 1997) *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci*, 514, Kluwer, Dordrecht, 1-37.

[11] H.C. G. von Bothmer, K. Ranestad (2009), A general formula for the algebraic degree in semidefinite programming, *Bull. London Math. Soc*, 41, 193 - 197.

[12] D. A. Cox, J. B. Little, D. B. O'Shea (2007), *Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Third edition (Undergraduate Texts in Mathematics), Springer, New York.

[13] L. Costa, S. Marchesi, R. M. Miró-Roig (2016), Tango bundles on Grassmannians, *Mathematische Nachrichten*, 289 (8–9), 950–961.

[14] N. H. Cong, D. T. Hiep, N.T. M. Van (2022), Euler characteristic of Tango bundles, *Da Lat University Journal of science*, 12(2), 113 - 122.

[15] Cox, David A.; Katz, Sheldon (1999), *Mirror symmetry and algebraic geometry*, American Mathematical Society.

[16] O. Debarre, L. Manivel (1998), Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète, Math. Ann. 312 , 549 - 574.

[17] D. Edidin, W. Graham (1998), *Equivariant Intersection theory*, Invent. math, 131, 595 - 634.

[18] D. Edidin, W.Graham (1998), *Localization in equivariant intersection theory and the Bott residue formula*, Amer. J. Math. 120, 619–636

[19] D. Eisenbud (1995), *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer - Verlag.

[20] D. Eisenbud, J. Harris (2016), 3264 *and all that: A second course in algebraic geometry*, Cambridge University Press.

[21] W. Fulton (1980), *Introduction to intersection theory in algebraic geometry*, Amer. Math. Soc. Rrovidence, Rhode Island

[22] W. Fulton (1998), *Intersection theory*, second edition, Springer-Verlag.

[23] Grayson, D., Stillman, M.:*Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry*, Available at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.

[24] P. Griffiths, J. Harris (1978), *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience John Wiley and Sons, New York.

[25] D. B. Grünberg, P. Moree (2008), Sequences of Enumerative Geometry: Congruences and Asymptotics, with an appendix by Don Zagier, *Experimental Math,* 17, 409-426.

[26] R. Hartshorne (1979), Algebraic vector bundles on projective spaces: A problem list, *Topology*, 18 (2), 117 - 128.

[27] J. Harris (1992), *Algebraic Geometry A First Course*, Springer, Berlin.

[28] B. Hassett (2007), *Introduction to Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[29] F. Hirzebruch (1978), *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag.

[30] D. T. Hiep (2014), Intersection Theory and applications to the computation of Gromov-Witten invariants, *PhD thesis, University of Kaiserslautern.*

[31] D. T. Hiep (2016), On the degree of Fano schemes of linear subspaces on hypersurfaces, *Kodai Math*, 39, 110-118.

[32] D. T. Hiep (2016), A formula for the algebraic degree in semidefinite propramming, *Kodai Math*, 39 (3), 484 – 488.

[33] D. T. Hiep (2019), Identities involving (doubly) symmetric polynomials and integrals over Grassmannians, *Fundamenta Mathematicae*, 246, 181-191.

[34] D. T. Hiep, N. C. Tu, N. T. M. Van (2019), A genus-degree formula for Fano varieties of linear subspaces on complete intersections, *Quy Nhon University Journal of Science*,13,91-97.

[35] D. T. Hiep, N. C. Tu (2021), An identity involving symmetric poly nomials and the geometry of Lagrangian Grassmannians, *Journal of Algebra*, 565, 564-581.

[36] D. T. Hiep, N. T. M. Van (2020), A characterization for the degree of Fano varieties, *Quy Nhon University Journal of Science*, 14(3), 53-59.

[37] D. T. Hiep, N. T. N. Giao, N. T. M. Van (2023), A characterization of the algebraic degree in semidefinite programming, *Collectanea Mathematica*, 4, 443 - 455.

[38] A. Langer (1997), Fano schemes of linear spaces on hypersurfaces, *Manuscripta Math*, 93 , 21-28.

[39] D. Laksov, A. Lascoux, A. Thorup (1989), On Giambelli's theorem on complete correlations, *Acta Math*, 162, 143–199

[40] L. Manivel (2001), *Symmetric functions: Schubert polynomials and degeneracy loci*, AMS Texts and Monographs, Providence, RI.

[41] L. Manivel, M. Michalek, L. Monin, T. Seynnaeve, M. Vodicka (2020), Complete Quadrics: Schubert Calculus For Gaussian Models and Semidefinite Programming, *arXiv:2011.08791.*

[42] I. G. Macdonald (1998), *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University press.

[43] D. G. Markushevich (1981), Numerical invariants of families of lines on some Fano varieties, *(Russian) Mat. Sb.(N.S)*, 116(158), 265-288, *English transl (1983), in Math.USSR-Sb*, 44, 239 - 260.

[44] J. Nie, K. Ranestad, B. Sturmfels (2010), The algebraic degree of semidefinite programming, *Math. Program. Ser. A*, 122, 379 - 405.

[45] Christian Okonek, Michael Schneider, Heinz Spindler (1980), *Vector bundles on complex projective spaces, With an Appendix by S.I. Gelfand*, Progress in Mathematics 3, Basel and Boston, Birkhauser.

[46] Prasad, Amritanshu (2019), An introduction to Schur polynomials, *Graduate J. Math*, 4, 62 – 84.

[47] Steven Rotman (1984), *The umbral calculus, Pure and applied mathematics 111*, Academic Press, Inc.

[48] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, William Traves (2000), *An Invitation to Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, Inc.

[49] R. P. Stanley (1999), *Enumerative combinatorics, Volume 2*, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 62.

[50] Sturm (1999), J.F.: *SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*, Optim. Methods Softw, 11, 12, 625–653.

[51] H. Tango (1976), An example of indecomposable vector bundle of rank $n-1$ on $\mathbb{P}^n$, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 16(1), 137–141.

[52] B. R. Tennison (1974),*On the quartic threefold*, Proc. London Math. Soc. (3), **29**, 714-734.

[53] L. Vandenberghe, S. Boyd (1996), Semidefinite programming, *SIAM Rev*, 38, 49 - 95.

[54] A. Weber (2012), Equivariant Chern classes and localization theorem, *Journal of Singularities*, 5, 153 - 176.

[55] H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe (2000), *Handbook of Semidefinite Programming*, Kluwer, Dordrecht.

[56] D. Zeilberger (1982), A combinatorial proof of Dyson's conjecture, *Discrete Math*, 41, 317-321.

[57] M. Zielenkiewicz (2014), Integration over homogeneous spaces for classical Lie groups using iterated residues at infinity, *Cent. Eur. J. Math*, 12, 574–583.